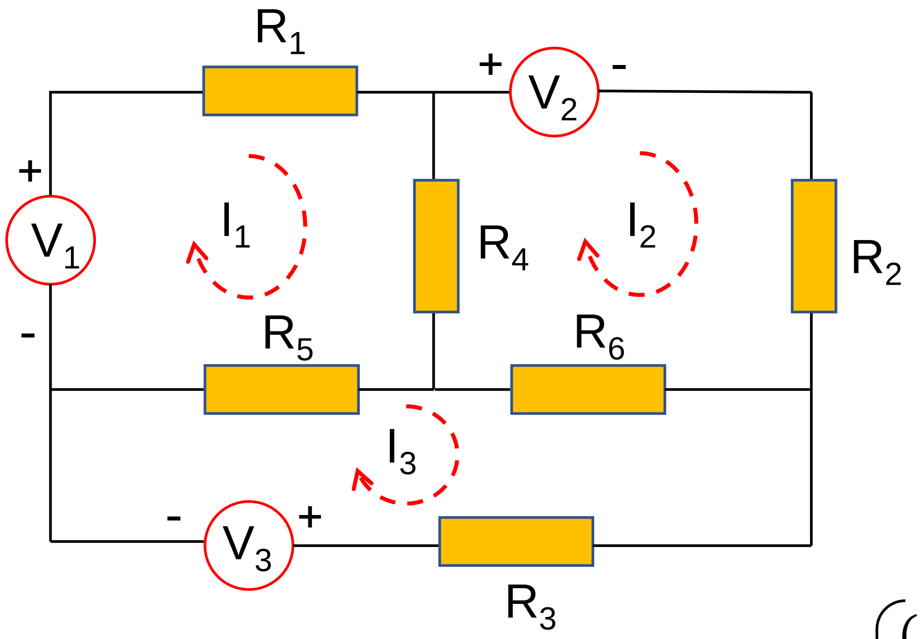
第六章 线性方程组的数值解法

肖　明

微电子科学与技术学院

邮箱：xiaom37@mail.sysu.edu.cn

线性方程组的求解---引言



列写KVL方程

$$\begin{aligned}(R_1+R_4+R_5)I_1-R_4I_2-R_5I_3&=V_1\\ -R_4I_1+(R_2+R_4+R_6)I_2-R_6I_3&=V_2\\ -R_5I_1-R_6I_2+(R_3+R_5+R_6)I_3&=V_3\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}(R_1+R_4+R_5) & -R_4 & -R_5\\ -R_4 & (R_2+R_4+R_6) & -R_6\\ -R_5 & -R_6 & (R_3+R_5+R_6)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\end{bmatrix}$$

目录

线性方程组的一般形式：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

矩阵形式为：

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

线性方程组

根据方程组的解析解的情况

- 有唯一解：适定方程组
- 不存在解：超定方程组
- 无穷多解：欠定方程组

本章始终假设

方程组有唯一解

根据方程组的形式和规模

- 大型（高阶）稀疏方程组
- 大型（高阶）稠密方程组
- 小型（低阶）稀疏方程组
- 小型（低阶）稠密方程组

线性方程组的解析方法

设有线性方程组:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

如何求解方程组?

如果线性方程组中的方程个数与未知量个数相同，并且其系数矩阵满秩，那么可有以下三种求解方法:

（1）克拉默（Cramer）法则；（2）逆矩阵；（3）高斯消元法。

线性方程组的解析方法-Cramer 法则

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \qquad \cdots, \qquad x_k=\frac{D_k}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \qquad \cdots,$$

$$x_n=\frac{D_n}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|},$$

<u>优点：</u>收敛、稳定、结论可靠

<u>缺点：</u>计算量过大

<u>计算量：</u> $M=(n^2-1)n!+n$

当 $n=10$ 时，$M=0.359251210\times10^9$

当 $n=40$ 时，$M=0.1304648537\times10^{42}$

线性方程组的求解方法

常用的数值解法：直接法、迭代法

直接法：**如果不考虑计算过程中的舍入误差，则通过有限步运算可以得到方程组的精确解。**

直接法

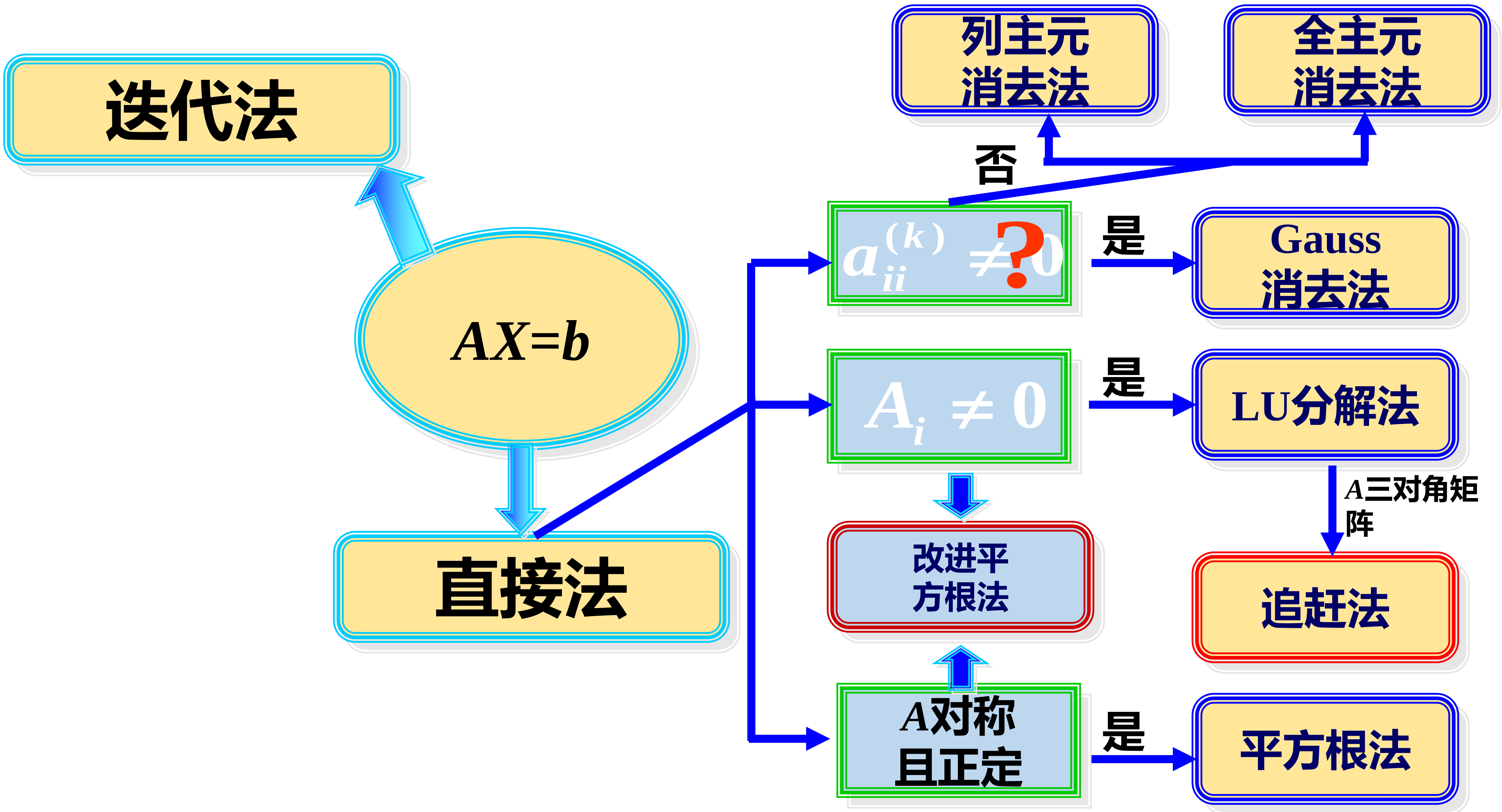
- 高斯消元法
- 主元素法
- 三角分解法
- 追赶法
- 平方根法

小型稠密矩阵

线性方程组的数值方法

迭代法：**采用逐次逼近的方法，即从一个初始解出发，按照某种迭代格式，逐步逼近方程组的解，直至满足精度要求为止。**

线性方程组的数值方法总结



高斯消元法

预备知识---几种特殊矩阵

设 $A=(a_{ij})\in \mathrm{R}^{n\times n}$

1. 上三角形矩阵——非零元素只出现在主对角线及其上（或右）方 $U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

2. 下三角形矩阵——非零元素只出现在主对角线及其下（或左）方 $L=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

3. 对角形矩阵——非零元素只在主对角线上出现 $\Lambda=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

4. 对称矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 反对称矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_{1n} & -b_{2n} & -b_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

预备知识---几种特殊矩阵

设 $A=(a_{ij})\in \mathrm{R}^{n\times n}$

5. 对称正定矩阵 $A=A^T$ 对任意非零向量， $x\in R^n$， $x^T AX=0$

6. 上Hessenberg矩阵 $|i-j|>1 \quad a_{ij}=0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7. 按行对角占优矩阵 $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \le |a_{ii}|, \quad i=1,2,\cdots,n$

8. 三对角矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

高斯消元法 (九章算术)

引 例

用消元法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

求解过程相当于

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

➢ 低阶稠密方程组

➢ 一般到三角

消元

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

回代

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}$$

高斯消元法的程序设计

```
function [Ax,bx]=GSelimination(A,b,n)
    %消去过程
    %n表示系数矩阵(方阵)的规模
    %A表示系数矩阵
    %b表示常数矩阵
    for k=1:(n-1)     %要进行n-1次消去过程
        if(A(k,k)~=0)    %主元素不能为0,
            for i=(k+1):n   %循环行
                c=(-1*A(i,k))/A(k,k); %倍乘因子
                for j=1:n   %单行循环
                    A(i,j)=A(i,j)+c*A(k,j); %更新矩阵元素
                end
                b(i)=b(i)+c*b(k);    %更新常数向量
            end
        else
            disp("主元素出现零，程序错误！");
            return;
        end
    end
    Ax=A;bx=b;
end

function [x]=GSback(Ax,bx,n)
    %回代过程
    %Ax为经过消去过程后得到的上三角矩阵
    %bx为经过消去过程后得到的常数向量
    %n表示系数矩阵的规模
    for i=n:-1:1
        if(Ax(i,i)~=0)
            x(i)=bx(i);
            for j=n:-1:i+1
                x(i)=x(i)-Ax(i,j)*x(j);
            end
            x(i)=x(i)/Ax(i,i);
        else
            disp("主元素出现零，程序错误！");
            return;
        end
    end
    x=x';
end
```

命令行窗口

```
请输入系数矩阵（方阵A）：
[1,1,1;0,4,-1;2,-2,1]
请输入常数向量（列向量b）：
[6;5;1]
Ax=b的解向量x:
     1
     2
     3

>>
```

高斯消元法的消元目标

一般方程组 $\xrightarrow{\text{消元法}}$ 三角形方程组

上三角方程组的一般形式是：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \\
\qquad\qquad a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\
\qquad\qquad\qquad \cdots \\
\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

其中$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$

高斯消元法的过程分析

对n阶线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

转化为等价的（同解）的三角形方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = g_1 \\ \qquad\quad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = g_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad + b_{m}x_n = g_n \end{cases}$$

称消元过程。逐次计算出 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 称回代过程。

高斯消元法的过程分析

统一记号 $a_{ij} \to a_{ij}^{(1)}$，$b_i \to b_i^{(1)}$

若 $a_{11}^{(1)} \neq 0$： $(\text{第2行}) - (\text{第1行}) \times \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \to (\text{新第2行})$

$$(\text{第3行}) - (\text{第1行}) \times \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \to (\text{新第3行})$$

……

$$(\text{第n行}) - (\text{第1行}) \times \frac{a_{n1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \to (\text{新第n行})$$

相当于第i个方程减第1个方程×数→新的第i方程—同解！第1方程不动！

高斯消元法的过程分析

上述消元过程除第一个方程不变以外,第2—第 n 个方程全消去了变量，而系数和常数项全得到新值：

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n&=b_1^{(1)},\\
a_{22}^{(2)}x_2+a_{23}^{(2)}x_3\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n&=b_2^{(2)},\\
a_{32}^{(2)}x_2+a_{33}^{(2)}x_3\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n&=b_3^{(2)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n2}^{(2)}x_2+a_{n3}^{(2)}x_3+\cdots+a_{nn}^{(2)}x_n&=b_n^{(2)},
\end{aligned}
\right.
$$

高斯消元法的过程分析

第1步消元算法归纳：

若 $a_{11}^{(1)} \neq 0$

方程左边

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

方程右边

$$b_{i}^{(2)} = b_{i}^{(1)} - b_{1}^{(1)} \times \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

高斯消元法的过程分析

第2步消元： 若$a_{22}^{(2)} \neq 0$，对除第一行第一列外的子阵作计算：

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

方程左边

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \times \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

方程右边

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - b_2^{(2)} \times \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

高斯消元法的过程分析

若$a_{33}^{(3)} \neq 0$，依次进行下去

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

方程左边

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \times \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

方程右边

$$b_{i}^{(3)} = b_{i}^{(2)} - b_{2}^{(2)} \times \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

方程左边

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \times \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

方程右边

$$b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - b_{k}^{(k)} \times \frac{a_{i2}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

高斯消元法的回代分析

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+\cdots+a_{1i}^{(1)}x_i+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{ii}^{(i)}x_i+\cdots+\cdots+a_{in}^{(i)}x_n=b_i^{(i)} \\ \qquad\qquad\qquad\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)} \end{cases}$$

$$\boxed{x_n=b_n^{(n)}\Big/a_{nn}^{(n)}}$$

$$\boxed{x_i=\left(b_i^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j\right)\Big/a_{ii}^{(i)}\qquad i=n-1,\ n-2,\cdots,1}$$

高斯消元法-例题

例1 用高斯消元法求解方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=9 \\ x_1+3x_2+2x_3=6 \end{cases}$

解析

$$n=3, a_{11}=1\neq 0$$

$$m_{21}=a_{21}/a_{11}=2/1=2$$

$$m_{31}=a_{31}/a_{11}=1/1=1$$

(第i个方程)$-\boldsymbol{m_{i1}}\times$(第1个方程)

$i=2,3$

第一次消元

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ \quad -x_2-2x_3=-3 \\ \qquad x_2-x_3=0 \end{cases}$$

高斯消元法-例题

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -3 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$a_{22}^{(1)} = -1 \neq 0, \quad m_{32} = a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = 1/-1 = -1$$

第二次消元

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -3 \\ \quad\quad -3x_3 = -3 \end{cases}$$

回代得 $x_3 = -3/-3 = 1$

$$x_2 = -(-3 + 2x_3) = -(-3 + 2\times 1) = 1$$

$$x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 = 6 - 2\times 1 - 3\times 1 = 1$$

故方程组的解为 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

高斯消元法的计算量分析

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}, \end{cases}$$

- 消第1列，计算量$= n\times(n-1)$ 乘法
- 消第2列，计算量$=(n-1)\times(n-2)$ 乘法

消去的计算量 $S = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n}{3}(n^2-1)$

高斯消元法的计算量分析

除法计算量：$\sum_{k=1}^{n-1} k = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\
\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\
\qquad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)},
\end{cases}
$$

高斯消元法的计算量分析

回代乘除计算量：

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots = .. \\ \qquad\qquad a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

合计 $$S = \frac{n}{3}(n^2-1) + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{3}(n^2+3n-1)$$

高斯消元法的计算量分析

消元法的计算量合计： $S=\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$

$$n=30, S(30)=9890$$

Cramer法则计算量： $M=(n^2-1)n!+n$

$$n=10，\ M=0.359251210\times10^9$$

$$n=40，\ M=0.1304648537\times10^{42}$$

选主元素的高斯消元法

高斯消元法-回顾

回 顾 考虑如下线性方程组的Gauss消元法

$$\begin{cases} \qquad\quad 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

解析

因为$a_{11} = 0$,故此题不能用Gauss消元法求解,但交换方程组的顺序后,就可用Gauss消元法求解了.

高斯消元法-回顾

回 顾　考虑如下线性方程组的Gauss消元法

$$\begin{cases} 0.0001x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

假设求解是用四位小数计算机上进行

解析　本题的计算机机内形式为

$$\begin{cases} 0.1000\times 10^{-3}x_1 + 0.1000\times 10^{1}x_2 = 0.1000\times 10^{1} \\ 0.1000\times 10^{1}x_1 + 0.1000\times 10^{1}x_2 = 0.2000\times 10^{1} \end{cases}$$

因为 $a_{11} \neq 0$,故可用Gauss消元法求解,进行第一次消元时有

高斯消元法-回顾

$$\begin{cases}0.1000\times10^{-3}x_1+0.1000\times10^{1}x_2=0.1000\times10^{1}\\0.1000\times10^{1}x_1+0.1000\times10^{1}x_2=0.2000\times10^{1}\end{cases}$$

$$a_{22}^{(1)}=0.1000\times10^{1}-10^{4}\times0.1000\times10^{1}$$

$$=0.00001\times10^{5}-0.1000\times10^{5}\quad\text{(对阶计算)}$$

$$=0.0000-0.1000\times10^{5}=-0.1000\times10^{5}$$

得三角方程组

$$\begin{cases}0.1000\times10^{-3}x_1+0.1000\times10^{1}x_2=0.1000\times10^{1}\\\qquad\qquad\qquad\quad-0.1000\times10^{5}x_2=-0.1000\times10^{5}\end{cases}$$

回代解得 $x_1=0,x_2=1$

严重失真！！

准确解为

$$x_1=\frac{10000}{9999}$$

$$x_2=\frac{9998}{9999}$$

失真的原因：除数的绝对值远远小于被除数的绝对值

列主元素的基本思想

用高斯消去法求解线性方程组时,应避免小的主元.在实际计算中,进行第k步消去前,应该在第k列元素 $a_{ik}\,(i=k-1,k,\cdots,n)$ 中找出绝大值最大者,例如

$$\left|a_{pk}^{(k-1)}\right| = \max_{k\le i\le n}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|$$

再把第p个方程与第k个方程进行交换，使 $a_{pk}^{(k-1)}$ 成为主元.我们称这个过程为选主元.由于只在第k列元素中选主元,通常也称为按列选主元(或称列主元素法).

全主元素法

如果在第k步消去前,在第k个方程到第n个方程所有的 x_k 到 x_n 的系数

$a_{ij}(i=k-1,k,\cdots,n,\quad j=k,\cdots,n)$ 中, 找出绝对值最大者,例如

$$\left|a_{pq}^{(k-1)}\right| = \max_{k\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(k-1)}\right|$$

再交换第k，p两个方程和第k，q两个未知量的次序,使 $a_{pq}^{(k-1)}$ 成为主元. 称这个过程为完全选主元或全主元素法.

不论是哪种方式选出主元,而后再按上面介绍的计算步骤进行消去的计算,一般都称为选主元的高斯消去法.在实际计算中,常用**按列选主元的高斯消去法**.

主元素法举例

例1 用列主元消去法解方程组
$$\begin{cases} -0.002x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.4 \\ x_1 + 0.78125x_2 = 1.3814 \\ 3.996x_1 + 5.5625x_2 + 4x_3 = 7.4178 \end{cases}$$

解析

第一次消元

$$[A^{(1)}|b^{(1)}] = \begin{pmatrix} -0.002 & 2 & 2 & 0.4 \\ 1 & 0.78125 & 0 & 1.3816 \\ 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \end{pmatrix}$$

因列主元素为$a_{31}^{(1)}$,故先作行变换 $r_1 \leftrightarrow r_3$,然后进行消元计算可得

$$[A^{(2)}|b^{(2)}] = \begin{pmatrix} 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \\ 0 & -0.61077 & -1.0010 & -0.47471 \\ 0 & 2.0029 & 2.0020 & 0.40371 \end{pmatrix}$$

主元素法举例

例 1　用列主元消去法解方程组 $\begin{cases} -0.002x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.4 \\ x_1 + 0.78125x_2 = 1.3814 \\ 3.996x_1 + 5.5625x_2 + 4x_3 = 7.4178 \end{cases}$

第二次消元　对$[A^{(2)}|b^{(2)}]$,因列主元素为 $a_{32}^{(2)}$,故先作行变换 $r_2 \leftrightarrow r_3$,然后进行消元计算可得

$$[A^{(3)}|b^{(3)}] = \begin{pmatrix} 3.996 & 5.5625 & 4 & 7.4178 \\ 0 & 2.0029 & 2.0020 & 0.40371 \\ 0 & 0 & -0.39050 & -0.35160 \end{pmatrix}$$

由此回代,得　$x = (1.9272,-0.69841,0.90038)^T$

精确解　$x = (1.9273,-0.69850,0.90042)^T$

比较准确！！

主元素法举例

例 1 用列主元消去法解方程组

$$\begin{cases} -0.002x_1 + \quad 2x_2 + \ 2x_3 = 0.4 \\ \quad x_1 + 0.78125x_2 \qquad\qquad = 1.3814 \\ 3.996x_1 + 5.5625x_2 + 4x_3 = 7.4178 \end{cases}$$

```
%准备工作：获取方程组的信息；

[m,n]=size(A);                  %
x=zeros(n,1);

%按列选主元；
for k=1:n-1                     %因为在
    max=abs(A(k,k));            %先假设
    r=k;                        %记录此
    for i=k+1:n                 %比较同
        if max<abs(A(i,k))
            max=abs(A(i,k));
            r=i;                %更新同
        end
    end


    %换行：要将主对角元的行的元素全
    if r~=k
        for c=k:n                   %只
            a(c)=A(k,c);            %将
            A(k,c)=A(r,c);          %将
            A(r,c)=a(c);            %将
        end                         %对
        d=b(k);                     %把
        b(k)=b(r);                  %再
        b(r)=d;                     %把
    end

    %消元：就是把主对角元下面的元素
    for i=k+1:n
        for j=i:n
            A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)
        end
        b(i)=b(i)-A(i,k)*b(k)/A(
        A(i,k)=0;
    end

    %回代求解：此时已经化为上三角型
    x(n)=b(n)/A(n,n);
    for i=n-1:(-1):1
        sum=0;
        for j=i+1:n
            sum=sum+A(i,j)*x(j);
        end
        x(i)=(b(i)-sum)/A(i,i);
    end
end
```

```
>> Column_GS
请输入系数矩阵（方阵A）：
[-0.002,2,2;1,0.78125,0;3.996,5.5625,4]
请输入常数向量（列向量b）：
[0.4;1.3814;7.4178]
Ax=b的解向量x:
    1.9295
   -0.7015
    0.9025

>>
```

主元素法举例-2

例 2 用全主元素法求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$ 计算过程保留三位小数。

解析

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一、三行互换}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \boxed{2.333} & 5 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \end{pmatrix}$$

主元素法举例-2

例 2 用全主元素法求解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$$

计算过程保留三位小数。

解析

$$\xrightarrow{\text{第二、三列互换}} \begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0.944 & 1.167 & 5.167 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二次消元}} \begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1.572 & 3.144 \end{pmatrix}$$

由回代过程得解

$$x_2 = 2.000, x_3 = 3.000, x_1 = 1.000$$

注意解的次序

列主元素法和全主元素法的比较

	优点	缺点
全主元素法	精度略优	计算时间较长
列主元素法	计算简单	精度稍低

计算经验与理论分析均表明，列主元素法与全主元素法同样具有良好的数值稳定性，故列主元素法是求解中小型稠密线性方程组的最好方法之一。

矩阵的三角分解

矩阵分解—背景介绍

设有线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

方程组的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

或简记为 $Ax = b$

矩阵分解是将矩阵拆解为数个矩阵的乘积，常见的有：1)三角分解法；2)QR 分解法。

如果$A = LU$,其中L为单位下三角矩阵，U为上三角矩阵，则：

$Ax=(LU)x=L(Ux)=b$

令 $Ux=y$,则$Ax=b$ $\Leftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$

三角方程

于是可首先求解向量y使$Ly=b$,然后求解 $Ux=y$,从而求解线性方程组 $Ax=b$.

LU分解

若非奇异矩阵A，经过一定的行变换后可以分解成两个三角形矩阵的乘积，即

$$\boxed{A = LU}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & O & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

则称上述分解为杜利特尔(Doolittle)分解，也称LU分解。

LU分解定理

定理1 若矩阵A非奇异，则A能分解为LU的充分必要条件是A的顺序主子式不为0，即

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\cdots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

LU分解定理

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{1n} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

由矩阵的乘法规则，比较两端的第一行、第一列可得

$$a_{1j} = u_{1j} (j = 1,2,\cdots,n)$$

$$l_{i1} = a_{i1} / u_{11} (i = 2,3,\cdots,n)$$

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21} u_{1j}, (j = 2,3,\cdots,n)$$

$$l_{i2} = (a_{i2} - l_{i1} u_{1j}) / u_{22}, (i = 3,\cdots,n)$$

分解定理

定理2：设A为n阶方阵，若A的顺序主子式

$$A_i (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

均不为零，则矩阵A存在唯一的LU分解。

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} & (j = 1,2,\cdots,n) \\ l_{i1} = a_{i1} / u_{11}, & (i = 2,3,\cdots,n) \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & (i = 2,\cdots,n, j = i,\cdots,n) \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & (j = 1,2\cdots,n, i = j+1,\cdots,n) \end{cases}$$

LU分解法的举例

例5.1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 的三角分解。

$$\begin{cases} u_{1j}=a_{1j} \\ l_{i1}=a_{i1}/u_{11} \\ u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \\ l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj})/u_{jj} \end{cases}$$

解析

$$u_{11}=a_{11}=2, u_{12}=a_{12}=2, u_{13}=a_{13}=3$$

$$l_{21}=a_{21}/u_{11}=\frac{4}{2}=2, l_{31}=a_{31}/u_{11}=-1$$

$$u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=7-2\times 2=3$$

$$u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}=1$$

$$l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}=2$$

$$u_{33}=a_{33}-(l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23})=6$$

所以 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{U}$

三角分解的紧凑格式

矩阵的三角分解可按以下格式及顺序进行。这种格式既便于记忆又便于计算，称紧凑格式。

$$\begin{pmatrix} (a_{11})u_{11} & (a_{12})u_{12} & (a_{13})u_{13} & \cdots & (a_{1n})u_{1n} \\ (a_{21})l_{21} & (a_{22})u_{22} & (a_{23})u_{23} & \cdots & (a_{2n})u_{2n} \\ (a_{31})l_{31} & (a_{32})l_{32} & (a_{33})u_{33} & \cdots & (a_{3n})u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})l_{n1} & (a_{n2})l_{n2} & (a_{n3})l_{n3} & \cdots & (a_{nn})u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} \\ l_{i1} = a_{i1} / u_{11} \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} \end{cases}$$

计算顺序：将a_{ij}, u_{ij}, l_{ij}按表列好，按框从外到内进行。每框先算行，从左向右依次计算l_{ik}；再算列，自上而下求u_{kj}

直接分解的运算特点：

①旧元素减去左边行与顶上列向量的点积

②计算行不用除法

③计算列要除主对角元

矩阵分解法的举例

例5.1

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&3\\0&3&1\\0&0&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}(a_{11})u_{11} & (a_{12})u_{12} & (a_{13})u_{13}\\ (a_{21})l_{21} & (a_{22})u_{22} & (a_{23})u_{23}\\ (a_{31})l_{31} & (a_{32})l_{32} & (a_{33})u_{33}\end{array}$$

$$\begin{cases}u_{1j}=a_{1j};\ l_{i1}=a_{i1}/u_{11}\\ u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}u_{kj};\ l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}u_{kj})/u_{jj}\end{cases}$$

$(2)2$　　$(2)2$　　$(3)3$

$(4)\frac{4}{2}=2$　　$(7)7-2\times2=3$　　$(7)7-2\times3=1$

$(-2)\frac{-2}{2}=-1$　　$(4)[4-(-1)\times2]/3=2$　　$(5)5-2\times1-(-1)\times3=6$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2&3\\2&7&7\\-1&4&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2&3\\2&3&1\\-1&2&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2&3\\2&3&1\\-1&2&6\end{pmatrix}$$

LU分解法解方程组

$Ax=(LU)x=L(Ux)=b$

令 $Ux=y$,则$Ax=b$ $\Leftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$

$$Ux = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & O & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

x： $x_n = y_n / u_{nn}$

$$x_k = \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right) \Big/ u_{kk}, \quad k = n-1, \cdots, 1$$

Y： $y_1 = b_1$

$$y_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj} y_j \quad k = 2,3,\ldots,n$$

注意 y_k的求法与u_{ij}相同，故可用紧凑格式

LU分解法求解方程组的举例

例5.2 用紧凑格式解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3=6 \\ -x_1+4x_2+3x_3=5 \\ x_1-x_2+3x_3=1 \end{cases}$$

第1步

求LU分解

$(3)3$	$(2)2$	$(5)5$	$(6)6$
$(-1)-\frac{1}{3}$	$(4)4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$	$(3)3+\frac{5}{3}=\frac{14}{3}$	$(5)5+2=7$
$(1)\frac{1}{3}$	$(-1)(-1-\frac{2}{3})/\frac{14}{3}=-\frac{5}{14}$	$(3)3+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}=3$	$(1)1+\frac{5}{2}-2=\frac{3}{2}$

$$\therefore L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{14} & 1 \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

第2步

解方程组

$$Ux=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

得原方程组的解：

$$\boxed{x_3=\frac{1}{2}, x_2=1, x_1=\frac{1}{2}}$$

LU分解法求解方程组的举例-2

例5.3 已知 $A=\begin{bmatrix}4&2&1&5\\8&7&2&10\\4&8&3&6\\12&6&11&20\end{bmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix}$，求解$Ax=b$

解析 将A进行LU分解可得

$$A=\begin{bmatrix}4&2&1&5\\8&7&2&10\\4&8&3&6\\12&6&11&20\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4&2&1&5\\2&3&0&0\\1&2&3&6\\3&0&11&20\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4&2&1&5\\2&3&0&0\\1&2&2&1\\3&0&4&20\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}4&2&1&5\\2&3&0&0\\1&2&2&1\\3&0&4&1\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&2&1&0\\3&0&4&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}4&2&1&5\\0&3&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

答案：

{15, -1, 8, -13}

LU分解法的总结

- 矩阵的LU分解将求解线性方程组问题转化成求解两个三角形方程组的问题。
- 矩阵LU分解的运算特点：从外到内，先算行，后算列。（计算行不需要用除法，计算列需要用到除法）

总结

- 高斯消元法是求解低阶稠密矩阵方程组的有效方法;
- 实际使用高斯消元法中，常采用选主元素法，可以避免出现绝对值很小的主元素作为除数出现的计算结果不可靠的问题;
- 矩阵的LU分解法求解方程组的方法计算量和高斯消元法一致（其实质是高斯消元法的变换），可以针对Ax=b中b变化的情况下进行使用（仅需要一次分解）。

谢谢大家！

肖　明

微电子科学与技术学院

邮箱：xiaom37@mail.sysu.edu.cn

电话：1781722706

办公室：中山大学珠海校区公共实验楼2楼A214室