第六章 线性方程组的数值解法

肖　明

微电子科学与技术学院

邮箱：xiaom37@mail.sysu.edu.cn

回顾---线性方程组求解的迭代法

求解方程组
$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}(3x_2 - 2x_3 + 20), \\ x_2 = \frac{1}{11}(-4x_1 + x_3 + 33), \\ x_3 = \frac{1}{12}(-6x_1 - 3x_2 + 36). \end{cases} \qquad (2)$$

或写为 $x = Bx + f$,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{6}{12} & -\frac{3}{12} & 0 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} \frac{20}{8} \\ \frac{33}{11} \\ \frac{36}{12} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20)/8 \\ x_2^{(k+1)} = (-4x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 33)/11 \\ x_3^{(k+1)} = (-6x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 36)/12 \end{cases}$$

简写为 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

其中k表示迭代次数（k=0,1,2, …）．迭代到第10次有

$$x^{(10)} = (3.000032,1.999838,0.9998813)^T;$$

$$\left\|\varepsilon^{(10)}\right\|_\infty = 0.000187(\varepsilon^{(10)} = x^{(10)} - x^*).$$

回顾---迭代法的收敛条件

定 理 (迭代法基本定理)

设有方程组$x = Bx + f$，及一阶定常迭代法$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$.

对任意选取初始向量$x^{(0)}$,迭代法收敛的充要条件是：

$$\rho\,(B) < 1.$$

证明：

$$\boxed{\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x = B\varepsilon^{(k-1)} = \ldots = B^k\varepsilon^{(0)} \to 0}$$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \varepsilon^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k->\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

$$\boxed{(\varepsilon^{(0)} = x^{(0)} - x)}$$

回顾---迭代法构造

设有 $Ax=b$，其中，$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为非奇异矩阵.

将A分裂为 $A=M-N$，

其中，M为可选择的非奇异矩阵，且使 $Mx=d$ 容易求解，

一般选择为A的某种近似，称 M 为分裂矩阵.

于是，求解 $Ax=b$ 转化为求解 $Mx=Nx+b$，即求解

$$Ax=b \Leftrightarrow \text{求解 } x=M^{-1}Nx+M^{-1}b.$$

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ (初始向量)}, \\ x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f \qquad (k=0,1,2,\ldots), \end{cases}$$

其中 $B=M^{-1}N=M^{-1}(M-A)=I-M^{-1}A,\ f=M^{-1}b.$

称 $B=I-M^{-1}A$ 为迭代法的迭代矩阵

目录

解线性方程组的迭代法

- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel 迭代法
- 超松弛（SOR）迭代法

Jacobi迭代法

Jacobi迭代法

为了方便地给出迭代矩阵B把系数矩阵A分裂成

$$A = D - L - U$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}),$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \cdots & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & -a_{n-1n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

迭代法格式

由$a_{ii} \neq 0(i=1,\cdots,n)$，选取$M$为$A$的对角元素部分，即选取$M=D$(对角阵)，

$$A = D - N$$

得到解 $Ax=b$的雅可比$(jacobi)$迭代法

$$\begin{cases} x^{(0)}(\text{初始向量}) \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k=0,1,\cdots), \end{cases}$$

其中$B = I - D^{-1}A,\ f = D^{-1}b.$称$B=J$为解$Ax=b$的雅可比迭代法的迭代矩阵。

$J = D^{-1}(L+U).$

迭代法格式

定理　设　$Ax=b$

雅可比迭代法收敛的充要条件是：

$$\rho(\mathrm{J})=\rho(\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A})<1$$

其中：

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$J=I-D^{-1}A$$

迭代法格式：

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \\ \boxed{x_i^{(k+1)}=(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}} \\ (i=1,2,\cdots,n)\quad (k=0,1,\cdots,\text{迭代次数}). \end{cases}$$

(1)计算公式简单，每迭代一次只需计算一次矩阵和向量的乘法;

(2)计算过程中原始矩阵A始终不变.

例题---直接求解

例 6.3 用雅可比迭代法解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

精确解 $x^* = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}.$

解析

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 7.2) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 8.3) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 4.2) \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 计算结果如下：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	0.72	0.83	0.84
2	0.971	1.07	1.15
…	…	…	…
11	1.099993	1.199993	1.299991
12	1.099998	1.199998	1.299997

例题---矩阵运算求解

例 6.4 用Jacobi迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 20x_1+2x_2+3x_3=24 \\ x_1+8x_2+x_3=12 \\ 2x_1-3x_2+15x_3=30 \end{cases}$$

要求精确到 $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_\infty \le 0.5\times10^{-4}$

解析 因为

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix} \quad D^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

故有

$$B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

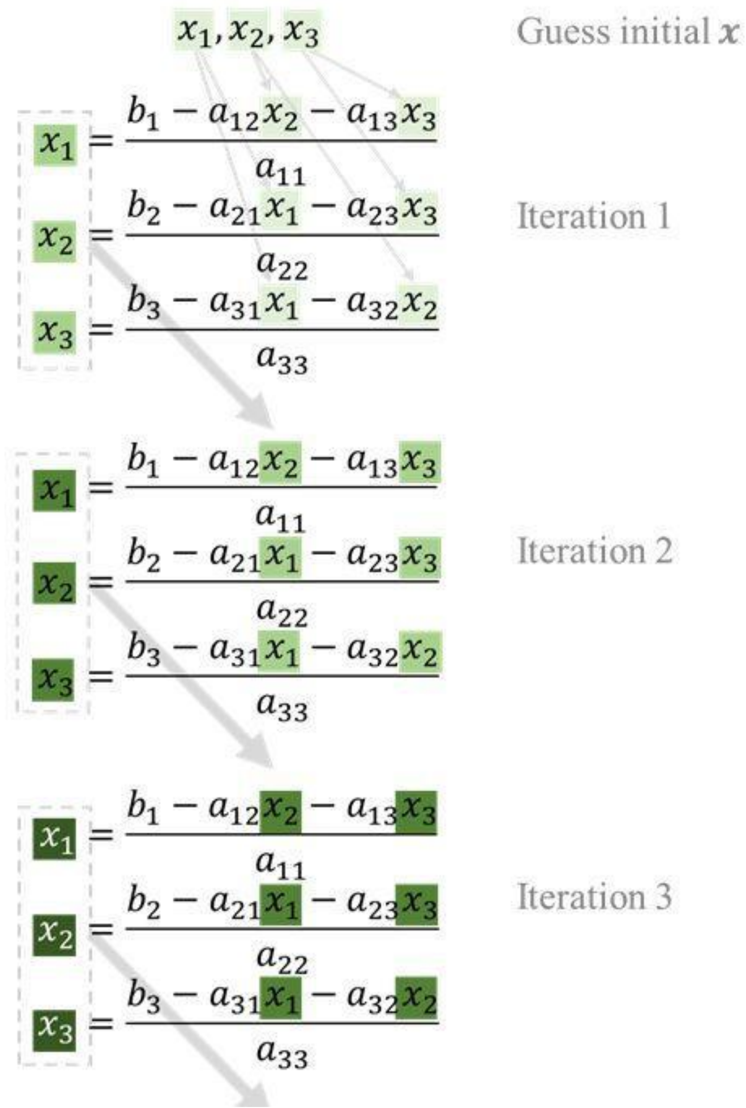
取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$代入迭代式得

$$x^{(1)}=Bx^{(0)}+g=(1.2,1.5,2)^T$$

如此继续下去，可得方程组的近似解。

Jacobi迭代法求解过程

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}$$



Jacobi迭代法的程序设计

```
function [x,t,it] = Jacobi(A,b,I,eps)
% 雅可比迭代法
% 输入:
% A: 系数矩阵
% b: 载荷矩阵
% I: 最大迭代次数
% 输出:
% x: 解矩阵
% t: 时间
% it: 迭代次数
% 迭代初值默认为 0

if nargin < 4
    eps = 1e-6;
end

tic
[n,~] = size(A);
x = zeros(n,1);

D = diag(diag(A)); %求 A 的对角矩阵
L = -tril(A,-1); %求 A 的下三角矩阵,不带对角线
U = -triu(A,1); %求 A 的上三角矩阵
J = D\(L+U);
f = D\b;

x_exact = A\b;
it = 1;
for k = 1:I-1
    x = J*x+f;
    if norm(x-x_exact)>eps
        it = it+1;
    %该命令的作用是显示每一步的迭代结果,注意x是列向量,'表示转置的意思,所以要加'
    [k,x']
    norm(x-x_exact)
    end

end

t = toc;
end
```

迭代次数	x1	x2	x3	x-x_exact
0	0	0	0	
1	2.5	3	3	2.2913
2	2.875	2.3636	1	0.3845
3	3.1364	2.0455	0.9716	0.1465
4	3.0241	1.9478	0.9205	0.0981
5	3.0003	1.984	1.001	0.016
6	2.9938	2	1.0038	0.0073
7	2.999	2.0026	1.0031	0.0042
8	3.0002	2.0006	0.9998	6.90E-04
9	3.0003	1.9999	0.9997	3.93E-04
10	3	1.9999	0.9999	1.76E-04
11	3	2	1	3.24E-05
12	3	2	1	2.05E-05
13	3	2	1	7.17E-06
14	3	2	1	1.69E-06
15	3	2	1	1.01E-06

Gauss-Seidel迭代法

Gauss-Seidel迭代法格式

为了方便地给出迭代矩阵B把系数矩阵A分裂成

$$A = D - L - U$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}),$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \cdots & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & -a_{n-1n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel迭代法格式

选取分裂矩阵M为A的下三角部分，即选取

$$M = D - L$$

$$A = M - N,$$

于是，得到解$Ax = b$的高斯－塞德尔（$Gauss - Seidel$）迭代法

$$\begin{cases} x^{(0)}\ (\text{初始向量}), \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k = 0,1,2,\ldots,), \end{cases}$$

其中 $B = I - (D-L)^{-1}A,\ f = (D-L)^{-1}b.$

$G = (D-L)^{-1}U$为解$Ax = b$的高斯－塞德尔迭代法的迭代阵

Gauss-Seidel迭代法格式

下面是$Gauss-Seidel$迭代法的分量计算公式记

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots x_{ik}^{()},\cdots,x_n^{(0)})^T$$

$$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b$$

或

$$Dx^{(k+1)}=Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}+b$$

即$a_{ii}x_i^{(k+1)}=b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

于是解$Ax=b$的高斯－塞德尔迭代法计算公式为

Gauss-Seidel迭代法格式

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T \ (\text{初始向量}), \\ \boxed{x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}} \\ (i = 1, \cdots, n; k = 0, 1, \cdots). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T, \\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i \\ \Delta x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \\ (i = 1, \cdots, n; k = 0, 1, \cdots). \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代法求解过程

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}$$

x_2, x_3 Guess initial x

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

Iteration 1

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

Iteration 2

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

Iteration 3

Gauss-Seidel求解线性方程组的典型例题—直接求解

例6.5 用Gauss—Seidel 迭代法解题.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

解析 Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 7.2) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)} + 8.3) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 4.2) \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 计算结果如下：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	0.72	0.902	1.1644
…	…	…	…
8	1.099998	1.199999	1.3

精确解 $x^* = \{1.1,1.2,1.3\}$

Gauss-Seidel求解线性方程组的典型例题—矩阵求解

例 6.6

用$Gauss_Seidel$迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \qquad (1)$$

解析

记为$Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 33 \\ 36 \end{pmatrix}$$

取$x^{(0)} = (0,0,0)^T$.

Gauss-Seidel求解线性方程组的典型例题—矩阵求解

例 6.6 用$Gauss_Seidel$迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases} \qquad (1)$$

故有

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -3 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{bmatrix}$$

$$G = (D - L)^{-1} U$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f = (D - L)^{-1} b$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 33 \\ 36 \end{bmatrix}$$

取 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$代入迭代式即可求得近似解

Gauss-Seidel程序设计

```
function [x,t,it] = GaussSeidel(A,b,I,eps)
% 高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法
% 输入:
% A: 系数矩阵
% b: 载荷矩阵
% I: 最大迭代次数
% 输出:
% x: 解矩阵
% t: 时间
% it: 迭代次数
% 迭代初值默认为 0

if nargin < 4
    eps = 1e-6;
end

tic
[n,~] = size(A);
x = zeros(n,1);

D = diag(diag(A)); %求 A 的对角矩阵
L = -tril(A,-1); %求 A 的下三角矩阵,不带对角线
U = -triu(A,1); %求 A 的上三角矩阵
G = (D-L)\U;
f = (D-L)\b;

x_exact = A\b;
it = 1;
for k = 1:I-1
    x = G*x+f;
    if norm(x_exact-x)>eps
        it = it+1;
    %该命令的作用是显示每一步的迭代结果,注意x是列向量，'表示转置的意思，所以要加'
    [k,x']
    norm(x-x_exact)
    end
end

t = toc;
end
```

迭代次数	x1	x2	x3	x-x_exact
0	0	0	0	
1	2.5	2.0909	1.2273	0.5567
2	2.9773	2.0289	1.0041	0.037
3	3.0098	1.9968	0.9959	0.0111
4	2.9998	1.9997	1.0002	3.91E-04
5	2.9998	2.0001	1.0001	1.84E-04
6	3	2	1	1.35E-05
7	3	2	1	2.49E-06

达到同样精度，G-S迭代法比Jacobi迭代法收敛快

Jacobi法和Gauss-Seidel法的比较

用$Jacobi$迭代法和$Gauss$迭代法

求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 3 \end{cases}$$

答案：$\{-1,2,1\}$

```
it =

     3

>> x

x =

    -1
     2
     1

>>
```

Jacobi法收敛

```
        1000

>> x

x =

   1.0e+303 *

   -8.0149
    8.0176
   -0.0054
```

Gause-Seidel法发散

典型例题

例6.7 分别用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解下列方程组是否收敛？

$$(1)\quad \begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} 3x_1 - 10x_2 = -7 \\ 9x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}$$

解析 由于第一个方程组的系数矩阵严格对角占优，所以Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法均收敛。

第二个方程组的系数矩阵不是严格对角占优的，但可以交换两个方程的次序，将原方程变为同解方程组：

$$\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 = 5 \\ 3x_1 - 10x_2 = -7 \end{cases}$$

这时方程组得系数矩阵严格对角占优，两种迭代法都收敛。

小结

Gauss迭代法的特点

(1)计算公式简单，每迭代一次只需计算一次矩阵和向量的乘法;

(2)计算过程中原始矩阵*A*始终不变.

Jacobi与Gauss迭代法的比较

如果收敛的话,Gauss迭代法比Jacobi迭代法收敛的速度快。

松弛迭代法

松弛法的基本思想

为Gauss-Seidel 迭代法加速

记：$\Delta x = \left(\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right)^T = x^{(k+1)} - x^{(k)}$

其中 $x^{(k+1)}$ Gauss-Seidel 迭代公式得到，于是有

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \cdots + b_{1n}x_n^{(k)} + g_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} \qquad\qquad + b_{23}x_3^{(k)} + \cdots + b_{2n}x_n^{(k)} + g_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \qquad + g_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T, \\ \Delta x_i = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \\ \Delta x_i = (b_i - \sum\limits_{j=i}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} - x_i^{(k)} \\ \quad = (b_i - \sum\limits_{j=i}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii} \\ (i = 1, \cdots, n; k = 0, 1, \cdots). \end{cases}$$

松弛法的基本思想

$$\Delta x_i=\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum_{j=i+1}^{n}b_{ij}x_j^{(k)}+g_i-x_i^{(k)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})-x_i^{(k)}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

可以把 Δx 看作Gauss-Seidel 迭代的修正项，即第k次

近似解 $x^{(k)}$ 以此项修正后得到新的近似解

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\Delta x$$

松弛法是将 Δx 乘上一个参数因子ω作为修正项而得到新的近似解

具体公式为

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\Delta x$$

松弛法的基本思想

即 $$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \Delta x_i = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})$$

按上式计算 $Ax = b$ 的近似解序列的方法称为**松弛法**。

ω 称为**松弛因子**

- 当 $\omega < 1$ 时称为**低松弛**；
- 当 $\omega = 1$ 时称为**Gauss-Seidel迭代**；
- 当 $\omega > 1$ 时称为**超松弛法**。

超松弛法（SOR）的矩阵表示

选取分裂矩阵M为带参数下三角阵

$$M=\frac{1}{\omega}(D-\omega L)$$

其中 $\omega>0$ 为可选择的松弛因子。

SOR（Successive Over-Relaxation）：逐次超松弛迭代法

构造以 $SOR\equiv I-\omega(D-\omega L)^{-1}A$ 为迭代矩阵的迭代公式

$$x^{(k+1)}=\left(I-\omega(D-\omega L)^{-1}A\right)x^{(k)}+f$$

解 $Ax=b$ 的SOR方法为

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{初始向量} \\ x^{(k+1)}=SOR\,x^{(k)}+f & (k=0,1,\cdots) \end{cases}$$

其中 $f=\omega(D-\omega L)^{-1}b.$

SOR方法的构建

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots x_i^{(k)},\cdots x_n^{(k)})^T,$$

SOR方法的计算公式

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega\Delta x_i, \\ (i=1,2,\cdots,n;k=0,1,\cdots), \\ \omega\text{为松弛因子} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\omega(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\Big/a_{ii} \\ \text{或}x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\Big/a_{ii} \\ (i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1), \end{cases}$$

SOR方法的构建

SOR迭代法是Gauss—Seidel 迭代法的一种修正，可由下述思想得到.

设已知 $x^{(k)}$ 及已计算 $x^{(k+1)}$ 的分量 $x_j^{(k+1)}(j=1,2,\cdots,i-1)$

(1) 首先用Gauss—Seidel 迭代法定义辅助量 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$

$$\tilde{x}_i^{(k+1)}=(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}. \qquad (2.13)$$

(2) 再由 $x_i^{(k)}$与$\tilde{x}_i^{(k+1)}$加权平均定义，即 $x_i^{(k+1)}$

$$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\omega\,\tilde{x}_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega\,(\tilde{x}_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}) \qquad (2.14)$$

将(2.13)代入(2.14)得到解$Ax=b$的SOR迭代公式.

典型例题

例1 取 $\omega = 1.4,\ x^{(0)} = (1,1,1)^T$ 用超松弛法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1.8 \end{cases}$$

解析

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.4x_1^{(k)} + 0.7(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -0.4x_2^{(k)} + 0.7(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -0.4x_3^{(k)} + 0.7(1.8 + x_2^{(k+1)}) \end{cases} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

将 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$ 带入上式开始迭代 $x^{(9)} = (1.200, 1.3996, 1.6001)^T$

精确解: $x = (1.2, 1.4, 1.6)^T$.

松弛法的典型例题

例 2　用SOR方法解方程组

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

验证：松弛因子与迭代次数的关系，它的精确解为 $x^* = (-1,-1,-1,-1)^T$.

解析　取 $x^{(0)} = 0$，迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \omega\left(1 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4; \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4; \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} - x_4^{(k)}\right)/4; \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \omega\left(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 4x_4^{(k)}\right)/4; \end{cases}$$

松弛法的典型例题

取 $\omega = 1.3$ 第11次迭代结果为

$$x^{(11)} = (-0.9999646, -1.0000310, -0.9999953, -0.9999912)^T,$$

$$\left\|\varepsilon^{(11)}\right\|_2 \le 0.64 \times 10^{-5}.$$

对 ω 取其他值，迭代次数如下表，从此例看到，松弛因子选择得好，会使SOR迭代法的收敛大大加速，本例中$\omega = 1.3$是最佳松弛因子。

松弛因子	满足误差 $\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_2 < 10^{-5}$ 的迭代次数	松弛因子	满足误差
1.0	22	1.5	17
1.1	17	1.6	23
1.2	12	1.7	33
1.3	11	1.8	53
1.4	14	1.9	109

迭代法收敛性的其他判定方法

松弛法收敛的必要条件是： $\boxed{0<\omega<2}$

前面的判定定理虽然给出了判别迭代收敛的充要条件，但要求逆矩阵和特征值。而 $0<\omega<2$ 也只是松弛法收敛的必要条件，应用不方便。

松弛法的程序设计

```
function [x,t,it,w] = SOR(A,b,I,eps,w)
% 逐次超松弛迭代法(successive over relaxation method)迭代法
% 输入:
% A: 系数矩阵
% b: 载荷矩阵
% I: 最大迭代次数
% w: 松弛因子(w=1 时即为 Gauss-Seidel 迭代法)
% 输出:
% x: 解矩阵
% t: 时间
% it: 迭代次数
% w: 松弛因子
% 迭代初值默认为 0

tic
[n,~] = size(A);
x = zeros(n,1);

D = diag(diag(A)); %求 A 的对角矩阵
L = -tril(A,-1); %求 A 的下三角矩阵,不带对角线
U = -triu(A,1); %求 A 的上三角矩阵
w_opt = 2/(1+sqrt(1-(vrho(D\(L+U)))^2)); % 最佳松弛因子
if nargin < 4
    eps = 1e-6;
    w = w_opt;
end
if nargin < 5
    w = w_opt;
end
Lw = (D-w*L)\((1-w)*D+w*U);
f = w*((D-w*L)\b);

x_exact = A\b;
it = 1;
for k = 1:I-1
    x = Lw*x+f;
    if norm(x-x_exact)>eps
        it = it+1;
    end
end

t = toc;
end
```

迭代次数	x1	x2	x3	x-x_exact
0	0	0	0	
1	2.5863	2.1306	1.2147	0.484
2	3.0094	2.0121	0.9846	0.0218
3	3.0084	1.995	0.9975	0.0101
4	2.9984	2.0005	1.0008	0.0018
5	3.0001	2	0.9999	9.75E-05
6	3	2	1	3.28E-05
7	3	2	1	6.83E-06

谢谢大家！

肖　明

微电子科学与技术学院

邮箱：xiaom37@mail.sysu.edu.cn

电话：1781722706

办公室：中山大学珠海校区公共实验楼2楼A214室