第七章 常微分方程的数值解法

肖　明

微电子科学与技术学院

邮箱：xiaom37@mail.sysu.edu.cn

引言

许多实际问题的数学模型是微分方程或微分方程的定解问题,如物体运动,电路震荡,化学反映及生物群体的变化等.

能用解析方法求出精确解的微分方程为数不多,而且有的方程即使有解析解,也可能由于解的表达式非常复杂而不易计算,因此有必要研究微分方程的数值解法。

目录

研究重点

本章重点

研究一阶常微分方程的初值问题的数值解

其一般形式为:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

本章假定

函数$f(x,y)$连续,且关于y满足利普希茨（*Lipschitz*）条件:

$$\left| f(x,y) - f(x,\bar{y}) \right| \le L \left| y - \bar{y} \right|.$$

这样由常微分方程的理论知:

初值问题(1)解$y = y(x)$存在并且唯一.

初值问题数值解的提法

所谓数值解法，就是寻求解$y(x)$在一系列离散节点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_N = b$$

上的近似值 $y_0, y_1, y_2, \cdots y_n, y_N$

相邻两个节点的间距$h_n = x_{n+1} - x_n$称为步长。

如不特别说明，总是假定$h_i = h(i = 0,1,2\cdots)$为定数，

$$x_n = x_0 + nh, n = 0,1,2\cdots.$$

建立数值解法的常用方法

建立微分方程数值解法,首先要将微分方程离散化.

一般采用以下几种方法:

(1) 用差商近似导数

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_n, y_n)} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f(x_n, y(x_n))$$

进一步:令 $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$, $y_n \approx y(x_n)$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx \frac{dy}{dx}$$

$$\boldsymbol{y_{n+1} - y_n \approx hf(x_n, y_n)}$$

建立数值解法的常用方法

(2) 用数值积分近似积分

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \quad (n=0,1,\cdots)$$

即 $$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

进一步：令

$$y_{n+1} \approx y(x_{n+1}),\ y_n \approx y(x_n)$$

$$y_{n+1} - y_n \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx h f(x_n, y_n)$$

宽　　　高

实际上是矩形法

建立数值解法的常用方法

(3) 用Taylor多项式近似并可估计误差

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi)$$

$$\approx y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n)$$

进一步：令 $y_{n+1} \approx y(x_{n+1}),\ y_n \approx y(x_n)$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$\left|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\right| \le \frac{h^2}{2}\max_{a\le x\le b}\left|y''(x)\right|$$

欧拉法

欧拉方法求解

已知初值问题的一般形式为:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad a \le x \le b \qquad (1)$$

用差商近似导数

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx \frac{dy}{dx}$$

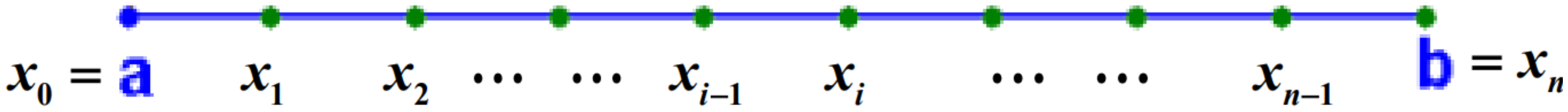
问题转化为

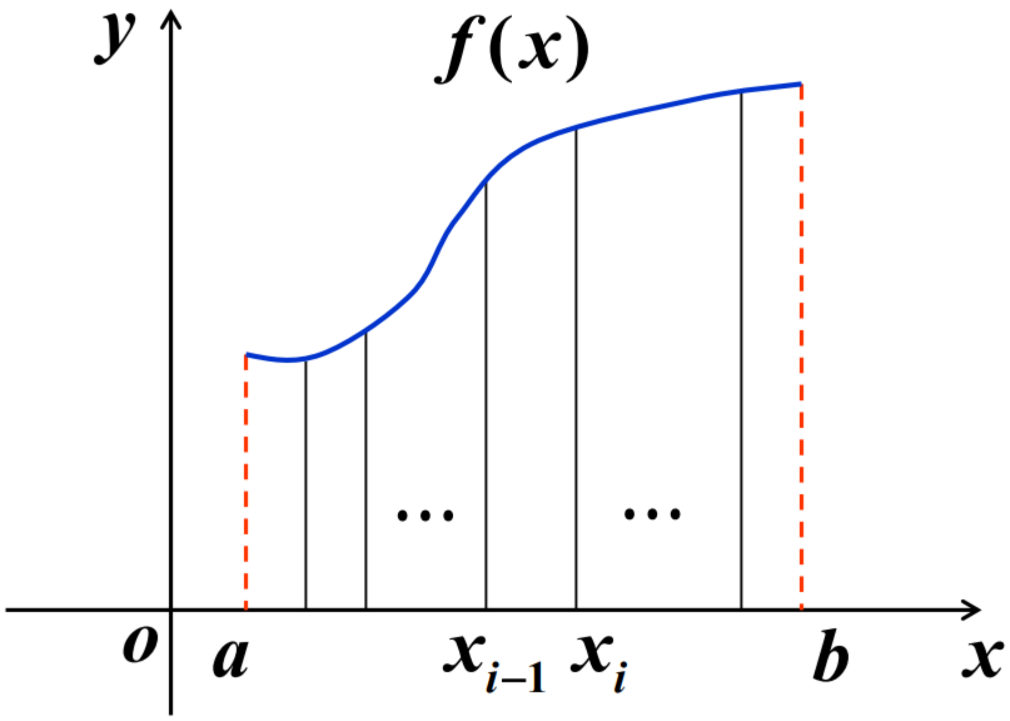
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \qquad (n = 0,1,2,3,\ldots)$$

–Euler方法的迭代公式

欧拉方法求解

分割区间，在每个小区间上使用 Euler 公式，逐步递推





欧拉方法求解

$$y(x_1) \approx y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \triangleq y_1$$

$$y(x_2) \approx y_1 + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) \triangleq y_2$$

$$\vdots$$

$$y(x_n) \approx y_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \triangleq y_n$$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

欧拉法的典型例题

例1 求解初值问题(步长$h=0.1$)

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解 $f(x,y) = y - 2x/y$

初值问题的迭代公式为:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n - 2x_n / y_n) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

作等价变换:$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

欧拉法的典型例题

结果比较

近似解

0	1.
0.1	1.1
0.2	1.19182
0.3	1.27744
0.4	1.35821
0.5	1.43513
0.6	1.50897

精确解

y[0] -> 1
y[0.1] -> 1.09545
y[0.2] -> 1.18322
y[0.3] -> 1.26491
y[0.4] -> 1.34164
y[0.5] -> 1.41421
y[0.6] -> 1.48324

真解 $y = \sqrt{2x+1}$

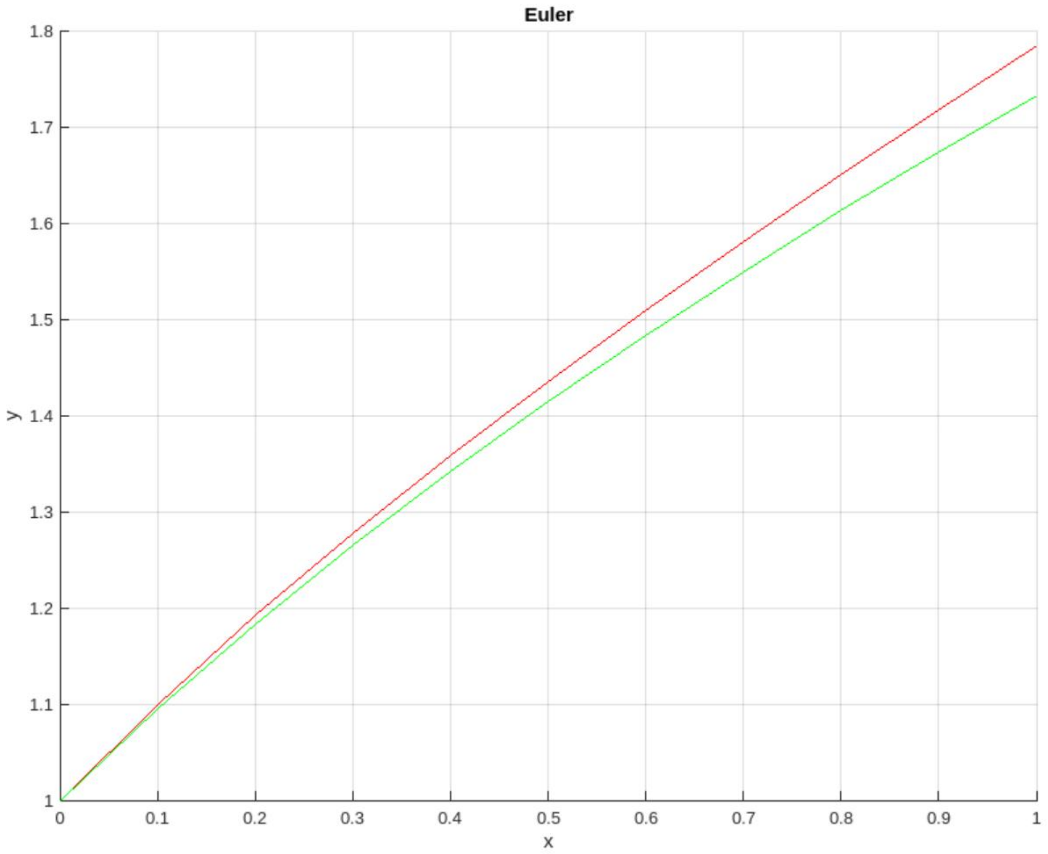
欧拉法的典型例题——程序设计

```
clc

clear all

x=[0:0.1:1];         %定义x
y=zeros(size(x));    %创建y
h=0.1;               %步长h=0.1
len = length(x);     %向量x的长度
y(1)=1;              %y初始化
for i=2:len          %从y2开始计算
    K=y(i-1)-2*x(i-1)/y(i-1);
    y(i)=y(i-1)+h*K
end

%画图
figure
hold on
grid on
plot(x , y ,'r')         %红色线为数值解
plot(x , sqrt(2*x+1) ,'g')       %绿色为精确解
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Euler')
```

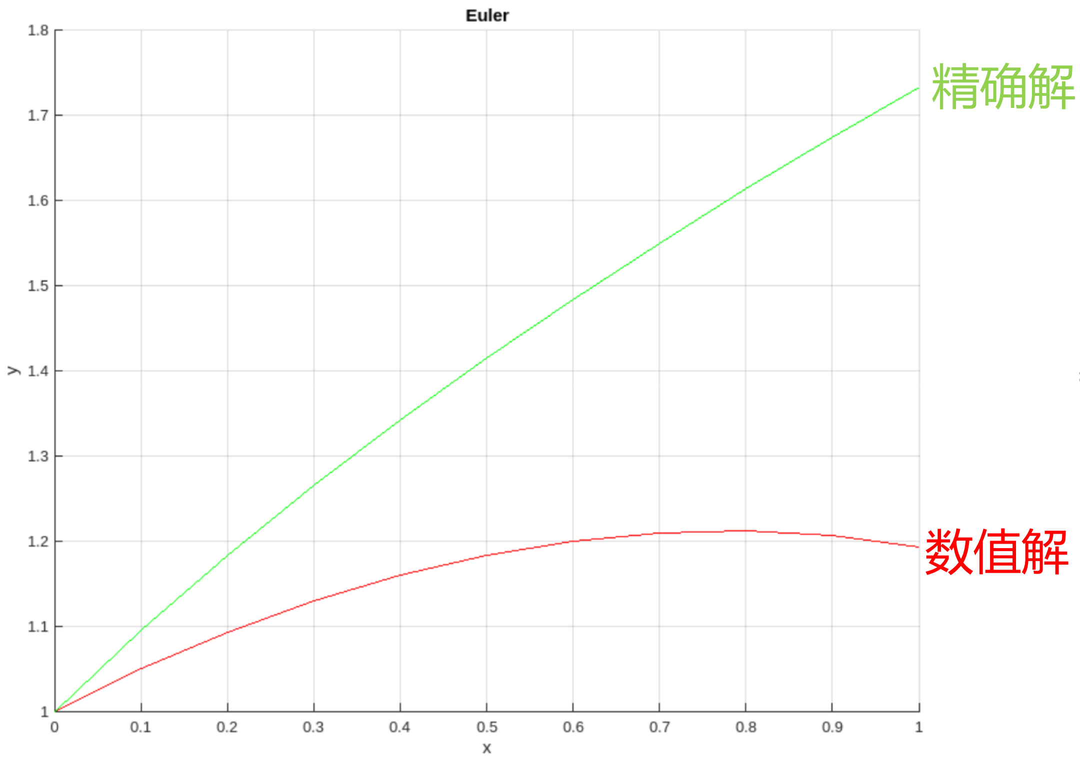


数值解

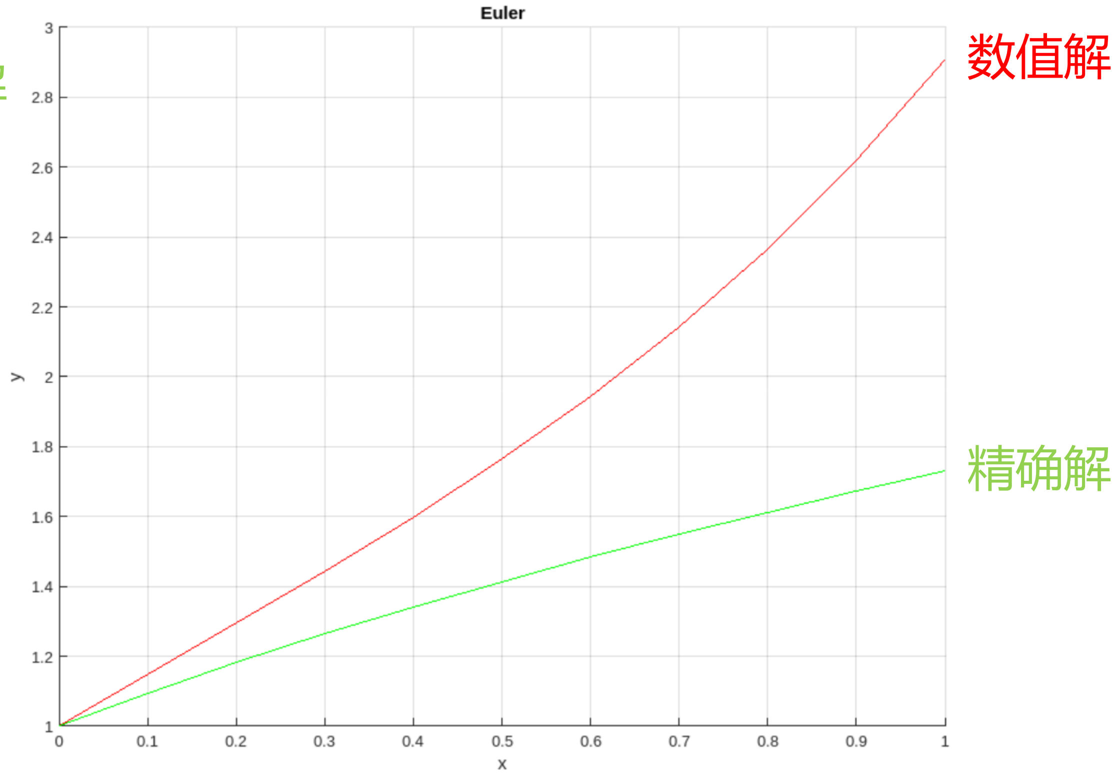
精确解

欧拉法的典型例题——程序设计

注意步长的选择



h=0.05



h=0.15

步长的选择对欧拉法求解的精度影响巨大

欧拉法的典型例题

例2　求解初值问题(步长$h=0.1$)

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{x}{y^2} & (0<x<1) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

解

$$f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{y^2}$$

初值问题的迭代公式为:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

作等价变换:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

欧拉法的典型例题

结果比较

近似解	
0	1.
0.1	1.
0.2	1.00667
0.3	1.01982
0.4	1.03905
0.5	1.06375
0.6	1.09321

精确解

```
y[0] -> 1
y[0.1] -> 1.00332
y[0.2] -> 1.01316
y[0.3] -> 1.02914
y[0.4] -> 1.05072
y[0.5] -> 1.07722
y[0.6] -> 1.10793
```

解的表达式： $y = \sqrt[3]{1 + x^2}$

欧拉法的几何意义

由 (x_0, y_0) 出发取解曲线 $y=y(x)$ 的切线（存在！），则斜率

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = f(x_0, y_0)$$

由于 $f(x_0, y_0)$ 及 (x_0, y_0) 已知，必有切线方程。

由点斜式写出切线方程：

$$y = y_0 + (x - x_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0)$$

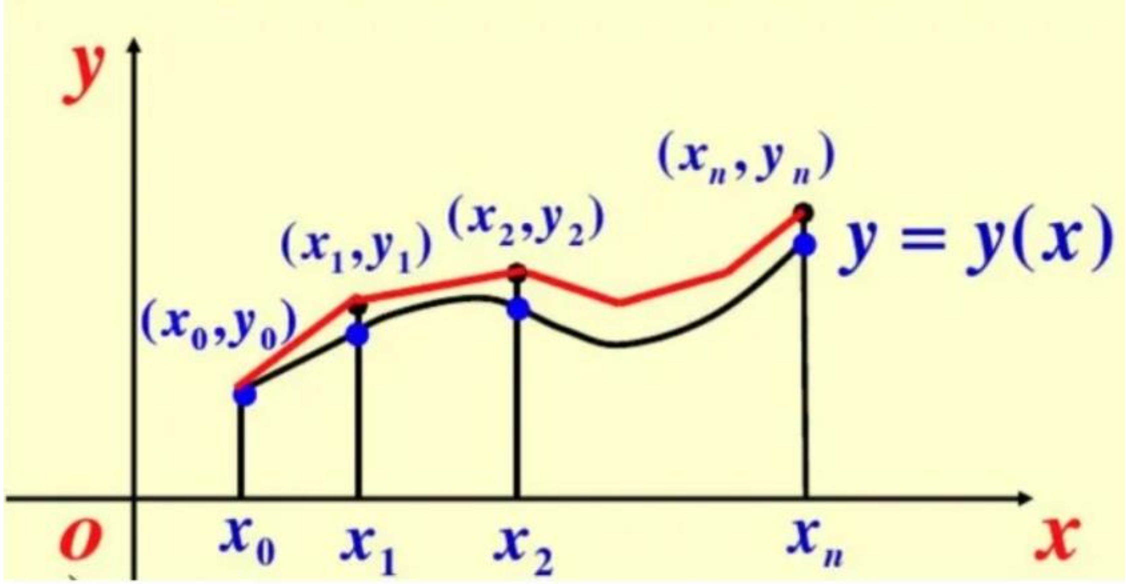
欧拉法的几何意义

等步长为h，则 $x_1 - x_0 = h$，可由切线算出y_1：

$$y_1 = y_0 + hf\ (x_0, y_0)$$

逐步计算出$y = y(x)$ 在 x_{n+1}点的值：

$$y_{n+1} = y_n + hf\ (x_n, y_n) \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$



欧拉法的几何意义：用一条折线近似代替积分曲线

谢谢大家！

肖　明

微电子科学与技术学院

邮箱：xiaom37@mail.sysu.edu.cn

电话：17817227706

办公室：中山大学珠海校区公共实验楼2楼A214室