数值计算复习课

肖　明

微电子科学与技术学院

邮箱：xiaom37@mail.sysu.edu.cn

期末考试

- 考试时间：2024年1月5号 下午2:30-4:30 （地点：教学楼E201）
- 考试范围：数值计算第一章到第七章
- 考试形式：7道计算题
- 考试要求：
  - 半开形式，带一张A4纸，手写公式，考试结束后会随试卷和答题纸统一上交
  - 可以带计算器
  - 严禁考试作弊，遵守考试纪律

第五章　非线性方程的数值解法

本章主要讨论单变量非线性方程

$$f(x)=0$$

的求根问题

多项式方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0\neq 0),$$

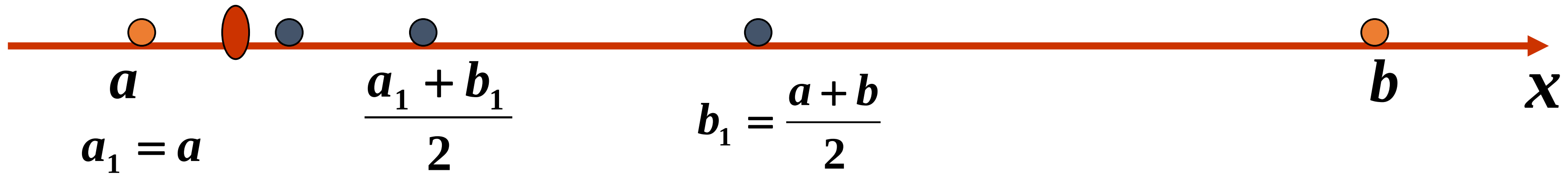
其中系数$a_i(i=0,1,\cdots,n)$为实数.

的求根问题

非线性方程的数值解法

		收敛条件及问题	
二分法	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$\lvert x^* - x_n \rvert \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$	➢ 收敛速度慢 ➢ 不适用于重根计算
不动点迭代法	$x_{k+1} = \varphi(x_k)$	$\lvert\varphi'(x)\rvert < 1$	➢ 迭代函数的选择影响较大
牛顿迭代法	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	变切线斜率	➢ 需要反复计算导数，程序易中断 ➢ 对初值的选择依赖性较大
简化的牛顿迭代法	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$	切线斜率不变	➢ 只需要一次导数计算
牛顿重根法	$x_{k+1} = x_k - k\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	(k重根)	➢ 针对重根计算收敛速度最快
牛顿下山法	$x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	$\lambda \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{2^m}\}$	➢ 可以放宽初值的选值范围，确保函数单调下降

非线性方程的数值解法—二分法



(1) 令$a_1 = a, b_1 = b$，计算中点$f\left(x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}\right)$，判断$f(x_1)$与$f(a_1)\,f(b_1)$的正负值情况，产生长度缩小一半的区间$[a_2, b_2]$，且区间长度

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

(2) 重复上述过程，完成第k-1步分半计算得到含根区间$[a_k, b_k]$，且区间长度

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

(3) 第k步计算，

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

且有，

$$|x^* - x_k| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$

由于

$$\boxed{|x^* - x_k| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k},}$$

只要二分足够多次（即k充分大），

则有 $|x^* - x_k| < \varepsilon$

这里ε为预定的精度.

$$n > \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}$$

例 2

求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$在区间$[1,\ 1.5]$内的一个实根,要求准确到小数后第2位.

$a=1.0, b=1.5, f(a)<0, f(b)>0$

2 取中点$x_1=1.25$，将区间二等分，

$\because f(x_0)<0, \therefore$ 令$a_2=x_1=1.25, b_2=b=1.5,$

得新的有根区间$[a_2, b_2]$

如此二分下去即可。现估计二分次数

$$\left|x^*-x_n\right|<0.005 \Rightarrow n \geq 6.64$$

所以二分7次可达到要求。

k	a	f(a)	b	f(b)	xk	f(xk)
1.0000	1.0000	-1.0000	1.5000	0.8750	1.2500	-0.2969
2.0000	1.2500	-0.2969	1.5000	0.8750	1.3750	0.2246
3.0000	1.2500	-0.2969	1.3750	0.2246	1.3125	-0.0515
4.0000	1.3125	-0.0515	1.3750	0.2246	1.3438	0.0826
5.0000	1.3125	-0.0515	1.3438	0.0826	1.3281	0.0146
6.0000	1.3125	-0.0515	1.3281	0.0146	1.3203	-0.0187
7.0000	1.3203	-0.0187	1.3281	0.0146	1.3242	-0.0021

经过7次迭代，函数方程根的近似解为：x=1.32421875

非线性方程的数值解法—不动点迭代法

构造不动点方程，以求得近似根。

即由方程 $f(x)=0$ 变换为其等价形式 $x=\varphi(x)$，然后建立迭代格式，

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

当给定初值 x_0 后，由迭代格式可求得数列 $\{x_k\}$。此数列可能收敛，也可能不收敛。如果 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，则它就是方程的根。因为：

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi(\lim_{k\to\infty}x_k)=\varphi(x^*)$$

故 k 充分大时，x_k 可作为方程根的近似值

为了保证迭代过程收敛，要求迭代函数的导数满足条件（压缩映像定理）：$|\varphi'(x)|<1$

例 2 用不同方法求方程$x^2-3=0$的根$x^*=\sqrt{3}$.

(1) $x_{k+1}=x_k^2+x_k-3, \varphi(x)=x^2+x-3, \varphi'(x)=2x+1,$

$\varphi'(x^*)=\varphi'(\sqrt{3})=2\sqrt{3}+1>1.$ 此迭代法发散

(2) $x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k}, \varphi(x)=\dfrac{3}{x},$ $\varphi'(x^*)=-1$ 此迭代法发散

(3) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}(x_k^2-3), \varphi(x)=x-\dfrac{1}{4}(x^2-3),$

$\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{2}x,$

$\varphi'(x^*)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1.$

此迭代法收敛

非线性方程的数值解法—牛顿迭代法

基本思路：将非线性方程 $f(x)=0$ 线性化。

取x_0作为初始近似值，将 $f(x)$在x_0做Taylor展开:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$0=f(x^*)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)\Rightarrow\quad x^*\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$ **作为第一次近似值**

Newton 迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- 收敛速度快的优点，但是存在需要反复计算导数、对初值的选择依赖性较大的问题

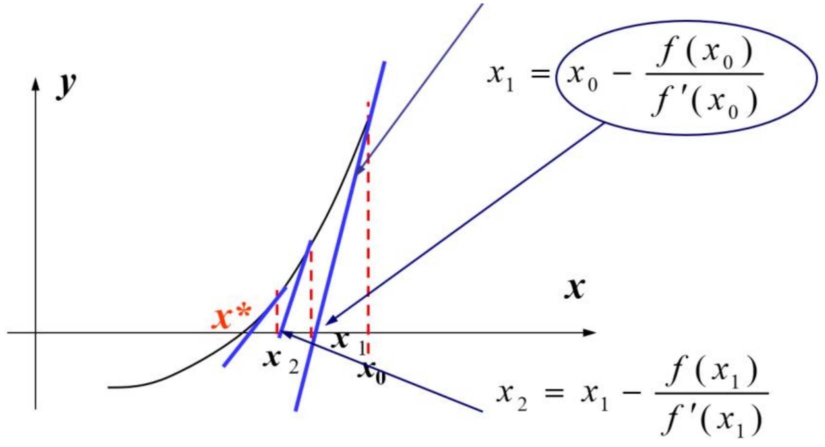
Newton 法:

(1) 任取迭代初始值 x_0

(2) 计算 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

(3) 判断收敛性：如果 $\boxed{|x_1-x_0|<\varepsilon}$ 或者 $\boxed{|f(x_1)|<\varepsilon}$，则算法收敛，停止计算，输出近似解 x_1

(4) 令 $x_0\leftarrow x_1$，返回第 (2) 步



非线性方程的数值解法—牛顿迭代法

用牛顿法解方程 $xe^x - 1 = 0.$

解 $f(x) = xe^x - 1,\ f'(x) = (1+x)e^x$

$f(0) = -1 < 0,\ f(1) = e - 1 > 0,$

且$x \in [0,1],\ f'(x) > 0,$

$\therefore\ f(x) = 0$有唯一根$x^* \in (0,1)$

取$x_0 = 0.5$

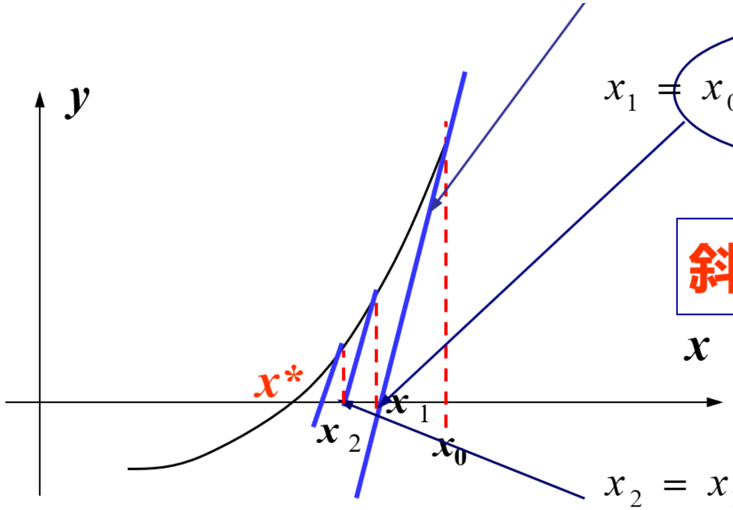
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k}(1+x_k)}$$

```
第 2 次, x=0.5710204398084223   误差值err=0.0710204398084223
第 3 次, x=0.5671555687441144   误差值err=0.0038648710643079
第 4 次, x=0.5671432905332610   误差值err=0.0000122782108535
第 5 次, x=0.5671432904097838   误差值err=0.0000000001234771
第 6 次, x=0.5671432904097838   误差值err=0.0000000000000000
迭代5次即可满足允许误差值退出
使用牛顿迭代法法迭代 5 次, 计算 x*exp(x) - 1=0 以 0.5 为迭代初始值的解为: 0.567143
```

非线性方程的数值解法—简化的牛顿迭代法

- 出发点：减少导数计算次数
- 基本思想：用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$



$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

斜率恒定不变

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)}$$

- 好处：只需要计算一次导数
- 缺点：只有线性收敛速度（假定方法是收敛的）

非线性方程的数值解法—牛顿重根法

如果x_0为$f(x)$的k重根，牛顿迭代公式修改为：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - k\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

若三种方法都收敛，则一般重根法收敛最快，牛顿法次之，简化迭代法最慢。

非线性方程的数值解法—牛顿下山法

将牛顿法与下山法结合起来使用，即在下山法保证函数值稳定下降的前提下，用牛顿法加快收敛速度

迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \ldots$$

- 其中 λ 是下山因子：从 λ=1 开始，逐次减半，直到满足下降条件为止

直到满足:

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

优点：确保**函数单调下降**，放宽了初值的选取范围

第六章 线性方程组的解法

线性方程组

线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

矩阵形式为：

$$\boldsymbol{Ax = b} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{m \times n}} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_m} \end{pmatrix}$$

线性方程组的解法

$AX=b$

- 直接法
  - Gauss消去法
  - 主元素消去法
  - LU分解法
  - 追赶法
  - 平方根法
- 迭代法
  - Jacobi迭代法
  - Gauss-Seidel迭代法
  - SOR迭代法

线性方程组的直接解法

线性方程组的解法---直接解法---Gauss 消元法

$$\boxed{\text{一般方程组} \xrightarrow{\text{消元法}} \text{三角形方程组}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = g_1 \\ \qquad\quad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = g_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + b_{nn}x_n = g_n \end{cases}$$

转化过程称消元过程。逐次计算出 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 称回代过程。

线性方程组的解法---直接解法---Gauss 消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

第1步消元算法归纳： 若 $a_{11}^{(1)} \neq 0$

方程左边

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \times \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

方程右边

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - b_1^{(1)} \times \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

第2步消元： 若$a_{22}^{(2)} \neq 0$，对除第一行第一列外的子阵作计算：

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

方程左边

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \times \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

方程右边

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - b_2^{(2)} \times \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

逐步消元，直到形成上三角矩阵形式

线性方程组的解法---直接解法---Gauss 消元法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+\cdots+a_{1i}^{(1)}x_i+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\
\qquad\cdots\cdots \\
\qquad a_{ii}^{(i)}x_i+\cdots+\cdots+a_{in}^{(i)}x_n=b_i^{(i)} \\
\qquad\qquad\cdots\cdots \\
\qquad\qquad a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)} \\
\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)}
\end{cases}
$$

回代过程

$$\boxed{x_n=b_n^{(n)}\Big/a_{nn}^{(n)}}$$

$$\boxed{x_i=\left(b_i^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j\right)\Big/a_{ii}^{(i)}\quad i=n-1,\ n-2,\ \cdots,1}$$

线性方程组的解法---直接解法---Gauss 消元法

例题 用高斯消元法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

解析

$$n = 3, a_{11} = 1 \neq 0$$

(第i个方程)$-m_{i1} \times$(第1个方程)

$$i = 2,3$$

$$m_{21} = a_{21} / a_{11} = 2/1 = 2$$

$$m_{31} = a_{31} / a_{11} = 1/1 = 1$$

第一次消元

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -3 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

线性方程组的解法---直接解法---Gauss 消元法

例题 用高斯消元法求解方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$a_{22}^{(1)} = -1 \neq 0,\quad m_{32} = a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = 1/-1 = -1$$

第二次消元
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -3 \\ \qquad -3x_3 = -3 \end{cases}$$

回代得 $x_3 = -3/-3 = 1$

$$x_2 = -(-3 + 2x_3) = -(-3 + 2\times 1) = 1$$

$$x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 = 6 - 2\times 1 - 3\times 1 = 1$$

故方程组的解为 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

线性方程组的解法---直接解法---主元素消元法

用高斯消去法求解线性方程组时,应避免小的主元.在实际计算中,进行第k步消去前,应该在第k列元素 $a_{ik}(i=k-1,k,\cdots,n)$ 中找出绝大值最大者,例如

$$\left|a_{pk}^{(k-1)}\right| = \max_{k\le i\le n}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|$$

再把第p个方程与第k个方程进行交换，使 $a_{pk}^{(k-1)}$ 成为主元.我们称这个过程为选主元.由于只在第k列元素中选主元,通常也称为按列选主元(或称列主元素法).

线性方程组的解法---直接解法---主元素消元法

例 2 用全主元素法求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$$

计算过程保留三位小数。

解析

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ \boxed{-18} & 3 & -1 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第一、三行互换}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \boxed{2.333} & 5 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \end{pmatrix}$$

线性方程组的解法---直接解法---主元素消元法

例 2 用全主元素法求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$$

计算过程保留三位小数。

解析

$$\xrightarrow{\text{第二、三列互换}} \begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0.944 & 1.167 & 5.167 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二次消元}} \begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1.572 & 3.144 \end{pmatrix}$$

由回代过程得解

$$x_2 = 2.000, x_3 = 3.000, x_1 = 1.000$$

注意解的次序

线性方程组的解法---直接解法---LU分解法

如果$A = LU$,其中L为单位下三角矩阵,

U为上三角矩阵，则：

$$\boxed{A = LU}$$

$$Ax=(LU)x=L(Ux)=b$$

令 $Ux=y$,则$Ax=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & O & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

于是可首先求解向量y使$Ly=b$,然后求解 $Ux=y$,从而求解线性方程组 $Ax=b$.

线性方程组的解法---直接解法---LU分解法

$$
\begin{cases}
u_{1j} = a_{1j} & (j = 1,2,\cdots,n) \\
l_{i1} = a_{i1} / u_{11}, & (i = 2,3,\cdots,n) \\
u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & (i = 2,\cdots,n, j = i,\cdots,n) \\
l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & (j = 1,2\cdots,n, i = j+1,\cdots,n)
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix}
(a_{11})u_{11} & (a_{12})u_{12} & (a_{13})u_{13} & \cdots & (a_{1n})u_{1n} \\
(a_{21})l_{21} & (a_{22})u_{22} & (a_{23})u_{23} & \cdots & (a_{2n})u_{2n} \\
(a_{31})l_{31} & (a_{32})l_{32} & (a_{33})u_{33} & \cdots & (a_{3n})u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(a_{n1})l_{n1} & (a_{n2})l_{n2} & (a_{n3})l_{n3} & \cdots & (a_{nn})u_{nn}
\end{pmatrix}
$$

直接分解的运算特点：

①旧元素减去左边行与顶上列向量的点积

②计算行不用除法

③计算列要除主对角元

计算顺序：将a_{ij}, u_{ij}, l_{ij}按表列好，按框从外到内进行。每框先算行，从左向右依次计算l_{ik}；再算列，自上而下求u_{kj}

线性方程组的解法---直接解法---LU分解法

$$\begin{array}{l|l|l}
(a_{11})u_{11} & (a_{12})u_{12} & (a_{13})u_{13} \\
\hline
(a_{21})l_{21} & (a_{22})u_{22} & (a_{23})u_{23} \\
\cline{3-3}
(a_{31})l_{31} & (a_{32})l_{32} & (a_{33})u_{33}
\end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

用紧凑格式解方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3=6 \\ -x_1+4x_2+3x_3=5 \\ x_1-x_2+3x_3=1 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
(3)3 & (2)2 & (5)5 & (6)6 \\
\hline
(-1)-\frac{1}{3} & (4)4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3} & (3)3+\frac{5}{3}=\frac{14}{3} & (5)5+2=7 \\
\cline{3-4}
(1)\frac{1}{3} & (-1)(-1-\frac{2}{3})/\frac{14}{3}=-\frac{5}{14} & (3)3+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}=3 & (1)1+\frac{5}{2}-2=\frac{3}{2}
\end{array}$$

$$\therefore L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{14} & 1 \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Ux=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

得原方程组的解：

$$\boxed{x_3=\frac{1}{2}, x_2=1, x_1=\frac{1}{2}}$$

线性方程组的解法---直接解法---平方根法

定理 设 A 是对称正定矩阵，则存在惟一的非奇异下三角阵 L,使得

$$A = LL^T$$

且 L 的对角元素皆为正数。

$$A = LL^T \qquad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad Ly = b, \quad L^T x = y$$

$$\begin{cases} l_{11}y_1 & = b_1 \\ l_{21}y_2 + l_{22}y_2 & = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ l_{n1}y_1 + l_{n2}y_2 + \cdots + l_{nn}y_n & = b_n \end{cases}$$

$$y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k)/l_{ii}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{cases} l_{11}x_1 + l_{21}x_2 + \cdots + l_{n1}x_n = y_1 \\ \qquad\quad l_{22}x_2 + \cdots + l_{n2}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad l_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

$$x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki}x_k)/l_{ii}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1$$

$$\boxed{\begin{cases} l_{ij} & = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/l_{jj}, \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1 \\ l_{ii} & = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}}$$

线性方程组的解法---直接解法---平方根法

直接Cholesky分解

定理——若$A \in R^{n\times n}$是对称正定矩阵，则存在一个对角元全为正数的下三角矩阵$L \in R^{n\times n}$，使得$A = LL^T$成立。

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

推导$A = LL^T$：我们先令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \quad L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & L_{21}^T \\ 0 & L_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad L_{21} = \frac{1}{l_{11}} A_{21} \qquad \boxed{L_{22} L_{22}^T} = A_{22} - L_{21} L_{21}^T$$

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{21}^T \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} l_{11} & \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & L_{21}^T \\ & L_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11} L_{21}^T \\ l_{11} L_{21} & L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T \end{bmatrix}$$

STEP 1：求l_{11}和L_{21}　$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$，$L_{21} = \frac{1}{l_{11}} A_{21}$　1次开方，n-1次乘除法

STEP 2：求L_{22}　$\boxed{L_{22} L_{22}^T} = A_{22} - L_{21} L_{21}^T$　乘除法次数　$\frac{(n-1)^2}{2}$

STEP 3：A_{new}

直至矩阵规模变为1X1

线性方程组的解法---直接解法---平方根法

例题 用cholesky方法求解线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，其中

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -1 & 4.25 & 2.75\\ 1 & 2.75 & 3.5\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\ 6\\ 7.25\end{pmatrix}$$

解析 显然$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$，且$\mathrm{D}_1=4>0,\mathrm{D}_2=16>0,\mathrm{D}_3=16>0.$ 系数矩阵为对称正定矩阵

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}=2,\ l_{21}=\frac{a_{21}}{l_{11}}=-0.5,\ l_{31}=\frac{a_{31}}{l_{11}}=0.5,$$

$$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=2,$$

$$l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=1.5,$$

$$l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=1,$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}2 & & \\ -0.5 & 2 & \\ 0.5 & 1.5 & 1\end{pmatrix}$$

连续求解 $Ly=b$ $\quad L^Tx=y$

解得$\mathbf{x}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

线性方程组的解法---直接解法---追赶法

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ \cdots \\ a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

设矩阵A满足下列条件：

$$\begin{cases} |b_1| > |c_1| > 0 \\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i| \quad a_ic_i \neq 0 (i = 2,3,\cdots,n-1) \quad (*) \\ |b_n| > |a_n| > 0 \end{cases}$$

则它可分解为

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & O & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & O & \ddots & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & O & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & O & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

其中$c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$为A中给出，且分解是唯一的。

$$\begin{cases} u_1 = b_1 \\ l_i = a_i / u_{i-1} \qquad (i = 2,3,\cdots,n) \\ u_i = b_i - c_{i-1}l_i \end{cases}$$

令 $Ux=y$,则$Ax=b$ $\Leftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$

三对角矩阵计算公式为

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= d_1 \\ y_k &= d_k - l_k y_{k-1} \end{aligned}\right\} \text{“追”的过程} \qquad k = 2,3,\cdots,n$$

$$\underbrace{\begin{aligned} x_n &= y_n / u_n \\ x_k &= (y_k - c_k x_{k+1}) / u_k \end{aligned}}_{\text{“赶”的过程}} \qquad k = n-1, n-2, \cdots, 1$$

线性方程组的解法---直接解法---追赶法

例题

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 & = 1 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 & = 0 \\ x_3 - 2x_4 & = -1 \end{cases} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = b_1, l_k = a_k / u_{k-1}, u_k = b_k - l_k c_{k-1} \\ y_1 = d_1, \qquad y_k = d_k - l_k y_{k-1} \\ x_n = y_n / u_n, \quad x_k = (y_k - c_k x_{k+1}) / u_k \end{cases}$$

解析

$$u_1 = -2 \qquad y_1 = 1$$

$$l_2 = -\frac{1}{2} \qquad u_2 = -\frac{3}{2} \qquad y_2 = \frac{3}{2}$$

$$l_3 = -\frac{2}{3} \qquad u_3 = -2 \qquad y_3 = 1$$

$$l_4 = -\frac{1}{2} \qquad u_4 = -\frac{3}{2} \qquad y_4 = -\frac{1}{2}$$

$$x_4 = \frac{1}{3} = 0.3333 \qquad x_3 = \frac{1 - 1 * 0.3333}{-2} = -0.3333$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{2} - 0 * (-0.3333)}{-\frac{3}{2}} = -1 \qquad x_1 = \frac{1 - 1 * (-1)}{-2} = -1$$

线性方程组的解法---直接解法---追赶法

例题

$$\begin{cases} -2x_1+x_2 = 1 \\ x_1-2x_2 = 1 \\ x_2-2x_3+x_4 = 0 \\ x_3-2x_4 = -1 \end{cases} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = b_1, l_k = a_k / u_{k-1}, u_k = b_k - l_k c_{k-1} \\ y_1 = d_1, \quad y_k = d_k - l_k y_{k-1} \\ x_n = y_n / u_n, \quad x_k = (y_k - c_k x_{k+1}) / u_k \end{cases}$$

解析

或$\bar{A}$ $= \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & & & 1 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

同解三角方程组为Ux=y,即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \frac{1}{3} = 0.3333 \qquad x_3 = \frac{1-1*0.3333}{-2} = -0.3333$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{2} - 0*(-0.3333)}{-\frac{3}{2}} = -1 \qquad x_1 = \frac{1-1*(-1)}{-2} = -1$$

线性方程组的数值解法

线性方程组的解法---数值解法---总结

Jacobi迭代法

$$A = D - N$$

$$B = I - D^{-1}A,\ f = D^{-1}b$$

$$J = D^{-1}(L+U).$$

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T \\ \boxed{x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}} \\ (i = 1,2,\cdots,n)\quad (k = 0,1,\cdots,\text{迭代次数}). \end{cases}$$

计算过程中原始矩阵 A 始终不变

Gauss-Seidel 迭代法

$$M = D - L$$

$$A = M - N$$

$$B = I - (D-L)^{-1}A,\ f = (D-L)^{-1}b$$

$$G = (D-L)^{-1}U$$

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T\ (\text{初始向量}), \\ \boxed{x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}} \\ (i = 1,\cdots,n;\ k = 0,1,\cdots). \end{cases}$$

计算过程中原始矩阵A变化，且在第一次迭代时即开始更新数组分量

SOR迭代法

$$M = \frac{1}{\omega}(D - \omega L)$$

$$SOR \equiv I - \omega(D-\omega L)^{-1}A$$

$$L_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U].$$

$$f = \omega(D-\omega L)^{-1}b$$

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \Big/ a_{ii} \\ \text{或}\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \Big/ a_{ii} \\ (i = 1,2,\cdots,n;\ k = 0,1), \end{cases}$$

是G-S迭代法的修正，注意松弛因子的选择

线性方程组的解法---数值解法---Jacobi迭代法

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为了方便地给出迭代矩阵B把系数矩阵A分裂成

$$\boxed{A=D-L-U}$$

$$D=diag(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}),$$

$$L=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \cdots & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & -a_{n-1n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

线性方程组的解法---数值解法---Jacobi迭代法

由$a_{ii} \neq 0(i=1,\cdots,n)$，选取$M$为$A$的对角元素部分，

$$A = D - N$$

得到解 $Ax=b$的雅可比$(jacobi)$迭代法

$$\begin{cases} x^{(0)}(\text{初始向量}) \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k=0,1,\cdots), \end{cases}$$

其中$\boxed{B = I - D^{-1}A, f = D^{-1}b}$，称$B=J$为解$Ax=b$的雅可比迭代法的迭代矩阵。

$$J = D^{-1}(L+U).$$

线性方程组的解法---数值解法---Jacobi迭代法

例题 用Jacobi迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 20x_1+2x_2+3x_3=24 \\ x_1+8x_2+x_3=12 \\ 2x_1-3x_2+15x_3=30 \end{cases}$$

要求精确到 $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|_\infty \le 0.5\times 10^{-4}$

解析 因为

$$A=\begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix} \quad D^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

故有

$$B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$代入迭代式得

$$x^{(1)}=Bx^{(0)}+g=(1.2,1.5,2)^T$$

如此继续下去，可得方程组的近似解。

线性方程组的解法---数值解法---Gauss-Seidel迭代法

选取分裂矩阵M为A的下三角部分，即选取

$$M = D - L$$

$$A = M - N,$$

于是，得到解$Ax = b$的高斯$-$塞德尔（$Gauss - Seidel$）迭代法

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{（初始向量）}, \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \quad (k = 0,1,2,\ldots,), \end{cases}$$

其中 $B = I - (D-L)^{-1}A,\ f = (D-L)^{-1}b.$

$G = (D-L)^{-1}U$为解$Ax = b$的高斯$-$塞德尔迭代法的迭代阵

线性方程组的解法---数值解法---Gauss-Seidel迭代法

于是解$Ax=b$的高斯－塞德尔迭代法计算公式为

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T \text{（初始向量）}, \\ \boxed{x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}} \\ (i = 1, \cdots, n; k = 0, 1, \cdots). \end{cases}$$

线性方程组的解法---数值解法---Gauss-Seidel迭代法

例题

用Gauss—Seidel 迭代法解题.

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

解析

Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} + 7.2) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)} + 8.3) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 4.2) \end{cases}$$

取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 计算结果如下：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	0.72	0.902	1.1644
…	…	…	…
8	1.099998	1.199999	1.3

精确解 $x^* = \{1.1,1.2,1.3\}$

线性方程组的解法---数值解法---SOR迭代法

选取分裂矩阵M为带参数下三角阵

$$M = \frac{1}{\omega}(D - \omega L)$$

其中 $\omega > 0$ 为可选择的松弛因子。

构造以 $SOR \equiv I - \omega(D - \omega L)^{-1} A$ 为迭代矩阵的迭代公式

$$x^{(k+1)} = \left(I - \omega(D - \omega L)^{-1} A\right) x^{(k)} + f$$

解 $Ax = b$ 的SOR方法为

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{初始向量} \\ x^{(k+1)} = SOR\, x^{(k)} + f & (k = 0, 1, \cdots) \end{cases}$$ 其中 $f = \omega(D - \omega L)^{-1} b.$

线性方程组的解法---数值解法---SOR迭代法

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots x_i^{(k)},\cdots x_n^{(k)})^T,$$

SOR方法的计算公式

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega\Delta x_i, \\ (i=1,2,\cdots,n;k=0,1,\cdots), \\ \omega\text{为松弛因子} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\omega(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\Big/a_{ii} \\ \text{或}x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\omega(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\Big/a_{ii} \\ (i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1), \end{cases}$$

线性方程组的解法---数值解法---SOR迭代法

例题 取 $\omega = 1.4,\ x^{(0)} = (1,1,1)^T$ 用超松弛法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1.8 \end{cases}$$

解析

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.4x_1^{(k)} + 0.7(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -0.4x_2^{(k)} + 0.7(x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -0.4x_3^{(k)} + 0.7(1.8 + x_2^{(k+1)}) \end{cases} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

将 $x^{(0)} = (1,1,1)^T$ 带入上式开始迭代 $x^{(9)} = (1.200, 1.3996, 1.6001)^T$

精确解: $x = (1.2, 1.4, 1.6)^T$.

定理 迭代法基本原理

设有方程组 $x = Bx + f$ 及一阶定常迭代法

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

对任意选取初始向量 $x^{(0)}$，迭代法收敛的充要条件是 $\rho(B) < 1$.

推论 设 $Ax = b$，其中 $A = D - L - U$ 为非奇异矩阵且 D 为非奇异矩阵

则有 (1) Jacobi迭代法收敛 $\Leftrightarrow \rho(J) < 1$，其中 $J = D^{-1}(L+U)$.

(2) G-S迭代法收敛 $\Leftrightarrow \rho(G) < 1$，其中 $G = (D-L)^{-1}U$.

(3) SOR迭代法收敛 $\Leftrightarrow \rho(L_\omega) < 1$，其中 $L_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$.

线性方程组的解法---数值解法---收敛性

定理 设方程组$\boldsymbol{Ax=b}$，如果

(1) A为严格对角占优阵，则解$\boldsymbol{Ax=b}$的**Jacobi**迭代法, **Gauss-Seidel** 迭代法均收敛.

(2) A为弱对角占优阵，且A为不可约矩阵，则解$\boldsymbol{Ax=b}$的**Jacobi**迭代法, **Gauss-Seidel** 迭代法均收敛.

定理 若A为对称正定矩阵，则方程组 $Ax=b$的Gauss-Seidel 迭代法收敛.

定理 (SOR方法收敛的必要条件) 设解方程组 $Ax=b$的SOR迭代法收敛，则$0<\omega<2$.

定理 (SOR方法收敛的充分条件) 设有方程组 $Ax=b$，如果：

(1) A为对称正定矩阵，$\boldsymbol{A=D-L-L^T}$ ；

(2) $0<\omega<2$.

则解方程组 $Ax=b$的SOR迭代法收敛.

例题 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$$

讨论Jacobi和Gauss-Seidel方法的收敛性.

解析 系数矩阵A为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

故A分解后的各个矩阵分别为

$$D=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi迭代法的迭代矩阵为

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda I - B| = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 = 0$$

因此有 $\rho(B) = 0 < 1$

故Jacobi迭代法收敛。

使用Gauss-Seidel迭代法，由

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda I - G| = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

因此有 $\rho(B) = 2 > 1$

故Gauss-Seidel迭代法发散。

第七章 常微分方程的数值解法

研究一阶常微分方程的初值问题的数值解

其一般形式为:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad a \le x \le b \qquad (1)$$

所谓数值解法，就是寻求解$y(x)$在一系列离散节点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_N = b$$

上的近似值 $y_0, y_1, y_2, \cdots y_n, y_N$

相邻两个节点的间距$h_n = x_{n+1} - x_n$称为步长。

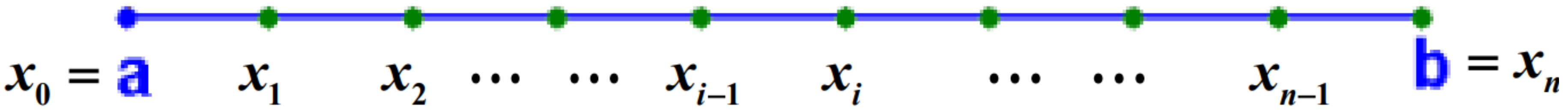
如不特别说明，总是假定$h_i = h(i = 0,1,2\cdots)$为定数，

常微分方程的数值求解方法—Euler法

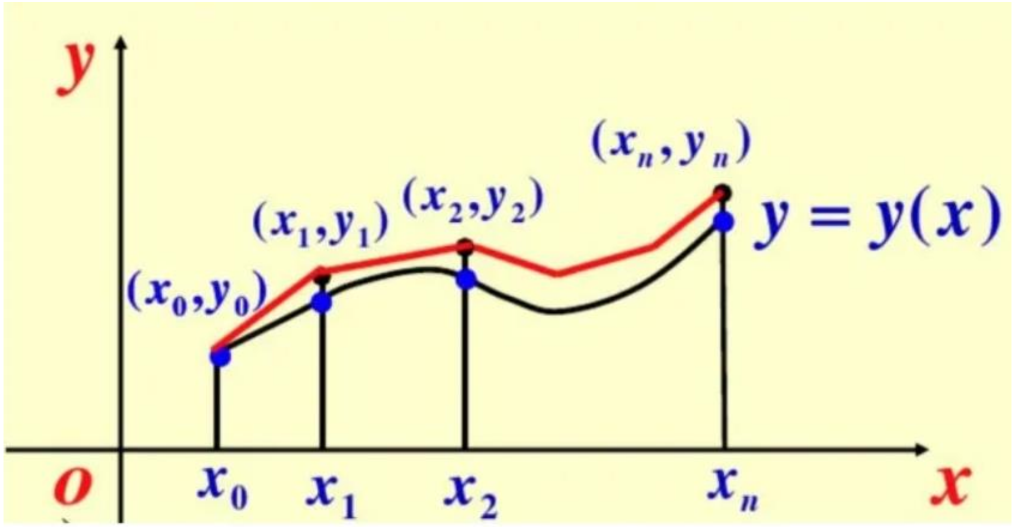
Euler方法	$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$	显式算法	➢ 左端点的切线斜率 ➢ 左端点的矩形面积
向后Euler法	$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$	隐式算法	➢ 右端点的切线斜率 ➢ 右端点的矩形面积 ➢ 需反复迭代
梯形法	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$	隐式算法	➢ 左右端点的切线平均 ➢ 含左右端点的梯形面积 ➢ 需反复迭代
改进Euler法	$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$ $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))$	显式算法	➢ 左右端点的切线平均 ➢ 含左右端点的梯形面积 ➢ 只需要一步迭代（预测校正）

常微分方程的数值求解—Euler法

分割区间，在每个小区间上使用 Euler 公式，逐步递推



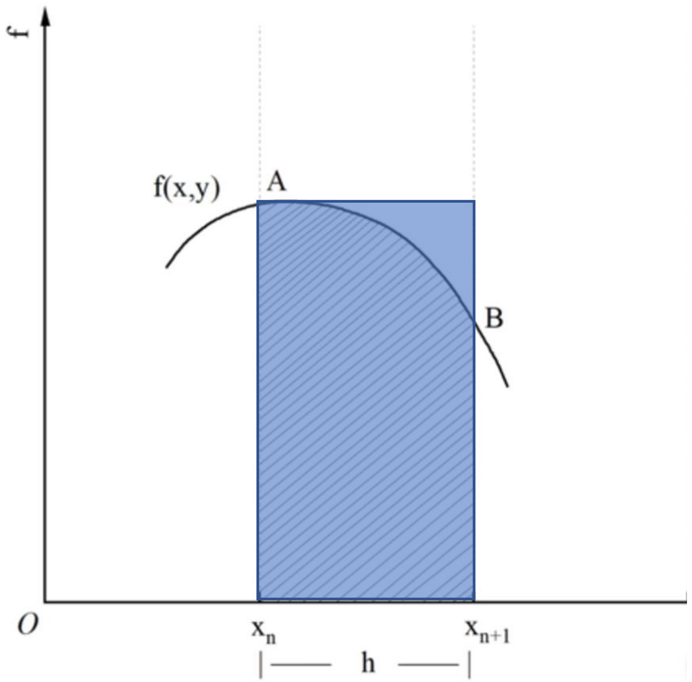
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$



欧拉法的几何意义：用一条折线近似代替积分曲线

计算精度：
o(h)

Euler法的数值积分



常微分方程的数值求解—Euler法—典型例题

求解初值问题(步长$h=0.1$)

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{x}{y^2} & (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解

$$f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{y^2}$$

迭代公式为:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

近似解

0	1.
0.1	1.
0.2	1.00667
0.3	1.01982
0.4	1.03905
0.5	1.06375
0.6	1.09321

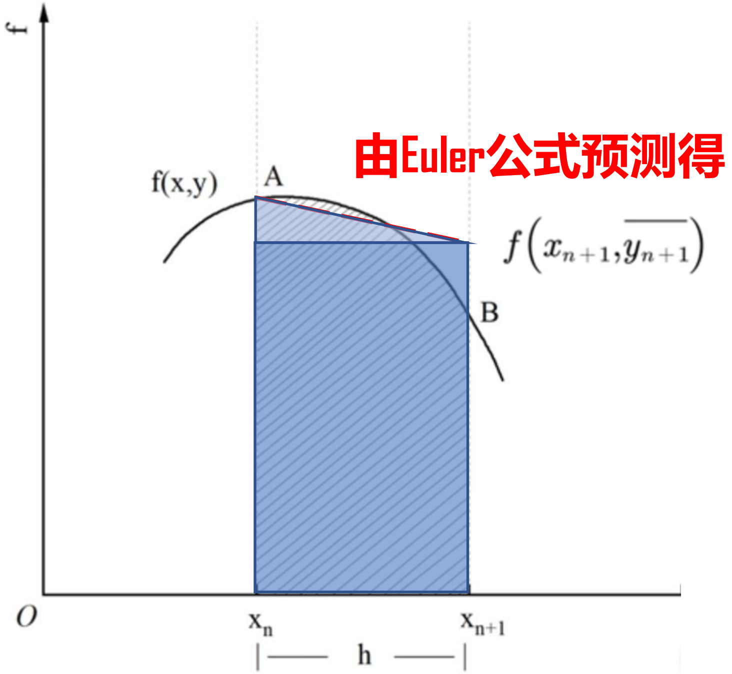
常微分方程的数值求解—改进的Euler法

预测 $\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$

校正 $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}})]}$$

Euler法的数值积分



- 仅使用一次迭代和梯形计算公式 （显式计算方法）
- 可以实现比欧拉法更高的计算精度和稳定性

计算精度： o(h²)

常微分方程的数值求解—改进的Euler法---典型例题

求解初值问题(步长$h=0.1$)

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解

$$f(x,y) = y - 2x/y$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

改进Euler近似解

0	1.
0.1	1.09774
0.2	1.18757
0.3	1.27129
0.4	1.35013
0.5	1.42499
0.6	1.49657

常微分方程的数值求解—龙格库塔法

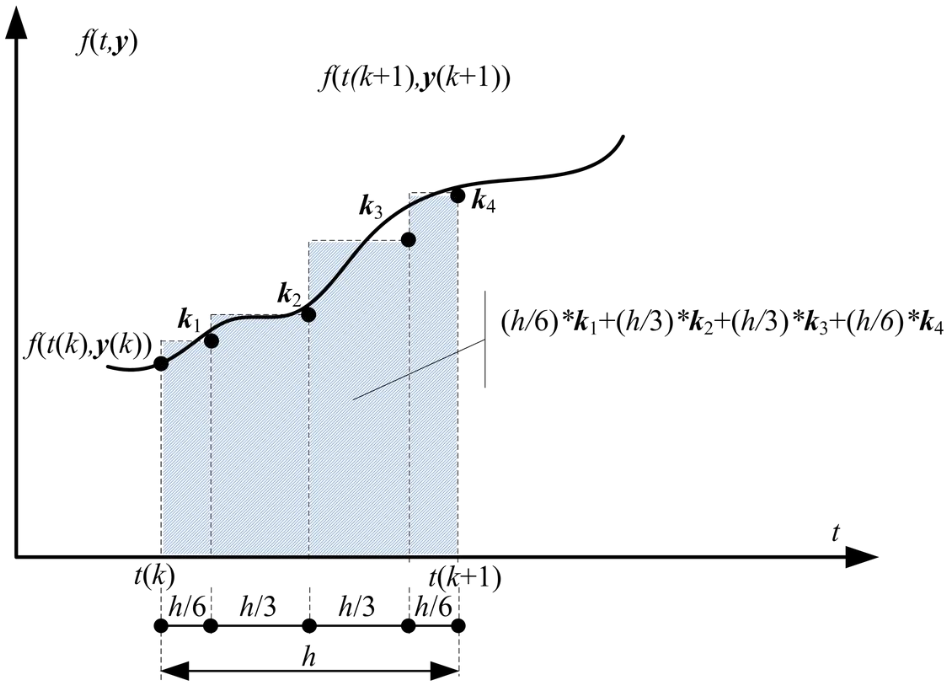
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f(x_n + h, y_n - hK_1 + 2hK_2). \end{cases}$$

三阶R-K方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2\right), \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3). \end{cases}$$

四阶R-K公式

四阶龙格库塔法



常微分方程的数值求解—线性多步法

如果计算y_{n+k}时，除用y_{n+k-1}的值，还要用到y_{n+i} $(i=0,1,\cdots,k-2)$的值，则称此方法为线性多步法，其中步数为用到的函数值的个数. 一般的线性多步法公式可表示为

$$y_{n+k}=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y_{n+i}+h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i} \qquad \text{or} \qquad y_{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n-i}+h\sum_{i=-1}^{k}\beta_i f_{n-i}$$

其中y_{n+1}为$y(x_{n+1})$的近似，$f_{n+i}=f(x_{n+i}, y_{n+i})$, 这里$x_{n+i}=x_n+ih$，$\alpha_i, \beta_i$为常数，$\alpha_0$及$\beta_0$不全为零，则称之为线性$k$步法，计算时需先给出前面$k$个近似值$y_0,y_1,\cdots,y_{k-1}$，再逐次求出$y_k,y_{k+1},\cdots$.

若使得 $p\geq 1$，即$c_0=c_1=0$，可得

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}=1,\\ \sum_{i=1}^{k-1}i\alpha_i+\sum_{i=0}^{k}\beta_i=k.\end{cases}$$

常微分方程的数值求解—线性多步法

Adams显式公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Adams隐式公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

Adams预测——校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) & \text{预测} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{24}[9f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] & \text{校正} \end{cases}$$