

AA170

线性代数 Linear Algebra

Lecture 1

- 课程大纲
- 预备知识

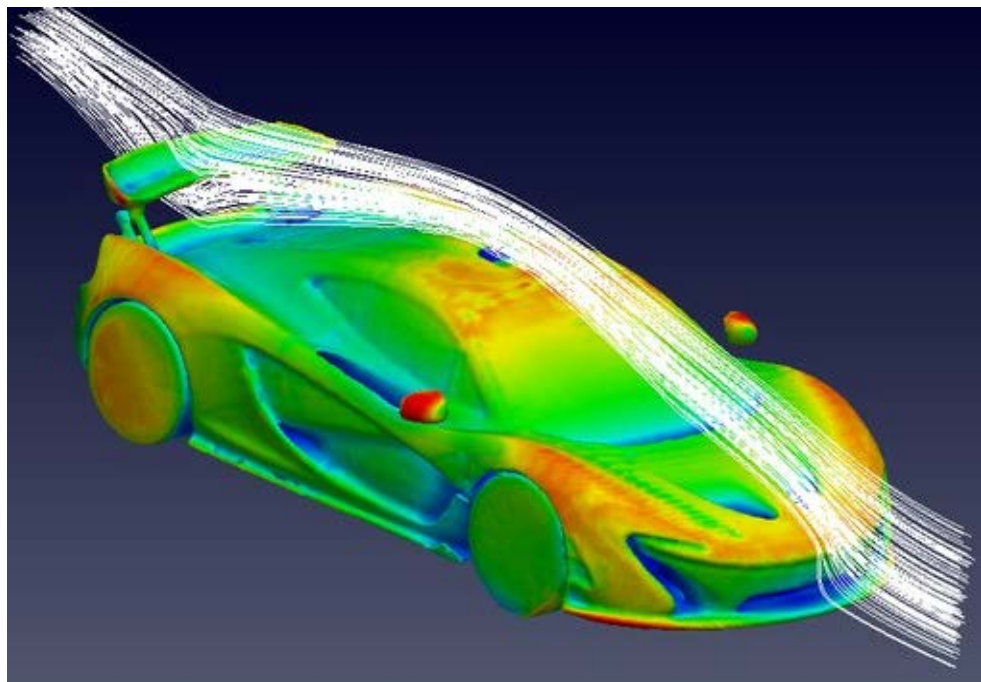
课程介绍

线性代数：入门近现代数学的基础，多学科的必备知识。

广泛的应用：计算机、工程学、自然科学、经济学…

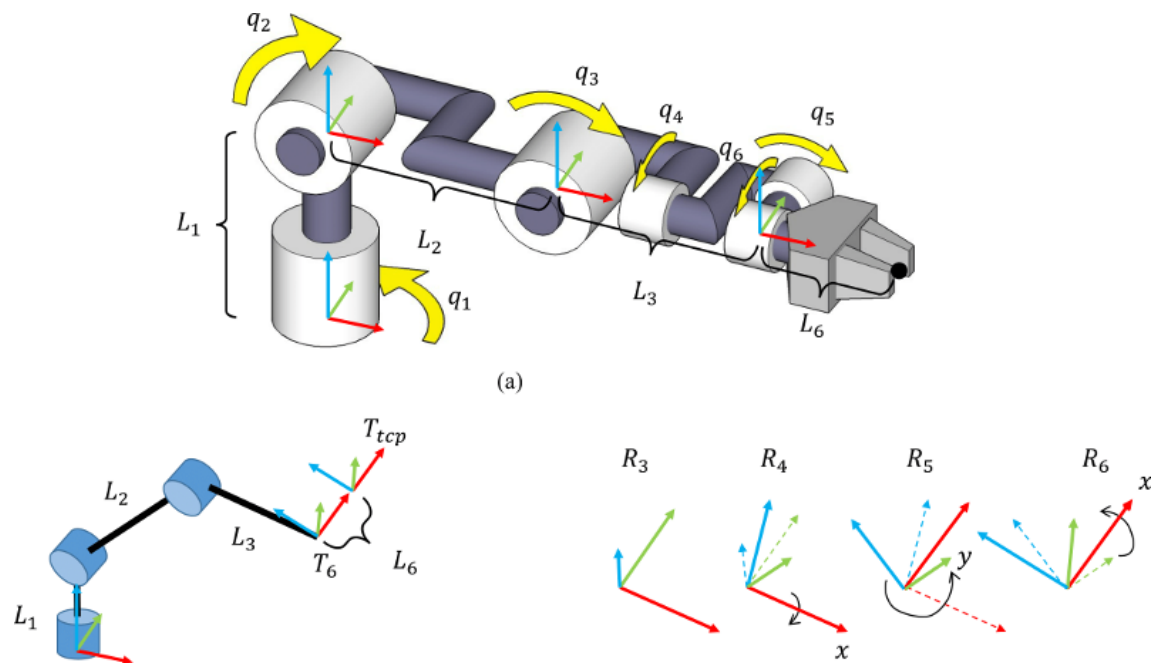
工程, 力学:

e.g. 有限元模拟, 流动仿真...



自动控制, 动力学:

e.g. 机械臂, 机器人...



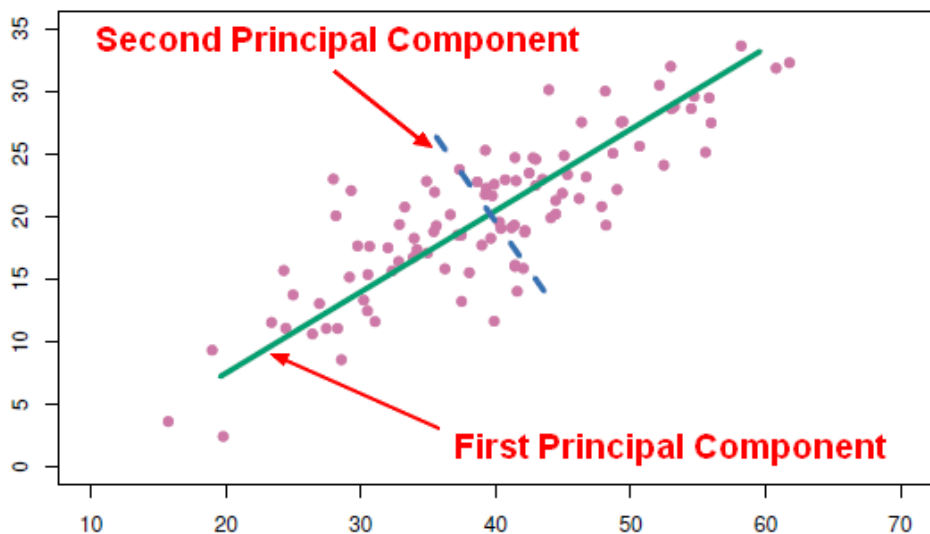
课程介绍

线性代数：入门近现代数学的基础，多学科的必备知识。

广泛的应用：计算机、工程学、自然科学、经济学…

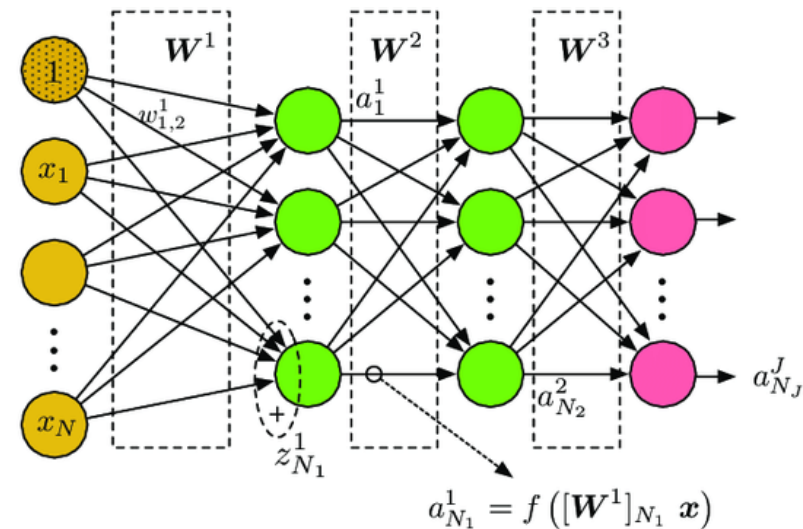
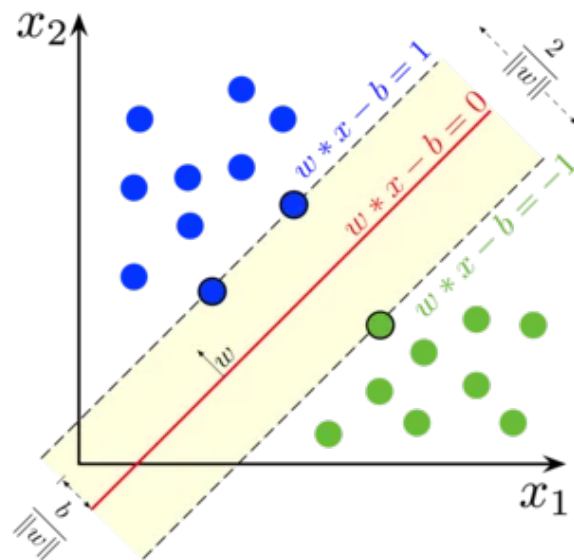
经济学, 统计学:

e.g. 回归分析, 主成分分析...



机器学习, AI:

e.g. 数据分类, 特征提取, 神经网络...



课程介绍

线性代数：入门近现代数学的基础，多学科的必备知识。

广泛的应用：计算机、工程学、自然科学、经济学…

线性代数的起源：求解线性方程组。

课程大纲

	章节	重点内容
线性代数的基础 What? 是什么?	0. 预备知识	向量及其线性组合。
	1. 矩阵与线性方程组	消元法求解线性方程组、矩阵的运算与变换。
	2. 矩阵的行列式	行列式的性质、行列式的计算。
	Quiz#1 随堂测验一	
线性代数的理解 Why? 为什么?	3. 向量空间	向量空间的基、线性无关、基变换、矩阵的秩。
	4. 线性变换	向量空间的线性变换、相似矩阵。
	5. 正交性	正交基、向量的范数、最小二乘问题。
	Quiz#2 随堂测验二	
线性代数的应用 How? 怎么用?	6. 矩阵的特征值	特征值、特征向量、矩阵对角化、正定矩阵、奇异值分解、二次型。
	Final exam 期末考试	

课程介绍

课件与作业：

“中山大学在线教学平台”

“雨课堂”平台

评分标准：

平时成绩：50分 { 课后作业：20分
Quiz测验#1：15分
Quiz测验#2：15分

期末考试：50分

参考教材：

《线性代数》(Linear Algebra with Applications), Steven J. Leon, 机械工业出版社, 第9版, 2015。

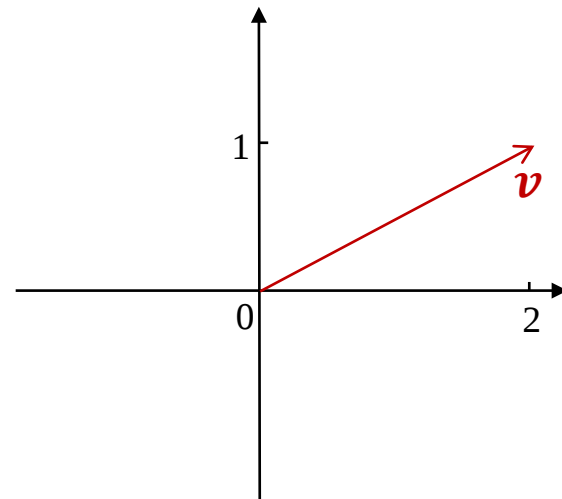
《线性代数》(Introduction to Linear Algebra), Gilbert Strang, 清华大学出版社, 第5版, 2019。

《简明线性代数》，丘维声，北京大学出版社，2002。

预备知识: 向量的记法

向量(vector)的记法: 用**粗体**代表向量 $\boldsymbol{v}$. 例如: 2维向量 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

注: 物理中的矢量(vector)有时也被记做 $\vec{v}$.



向量分为**列向量**(column vector)和**行向量**(row vector).

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (竖着写)} \quad \boldsymbol{v}^T = [2 \quad 1] \text{ (横着写)}$$

注意: 在本课程中, 若无特殊说明, “向量”默认是“**列向量**”的形式, 即竖着写.

$\boldsymbol{v}$: 列向量

$\boldsymbol{v}^T$: 行向量

向量的**转置**(Transpose): 标记为上角标 T .

(1) 转置操作把列向量变成行向量: $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}^T = [a_1 \quad a_2]$

(2) 转置操作把行向量变成列向量: $\boldsymbol{v}^T = [a_1 \quad a_2], \quad (\boldsymbol{v}^T)^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

转置的性质: $(\boldsymbol{v}^T)^T = \boldsymbol{v}$

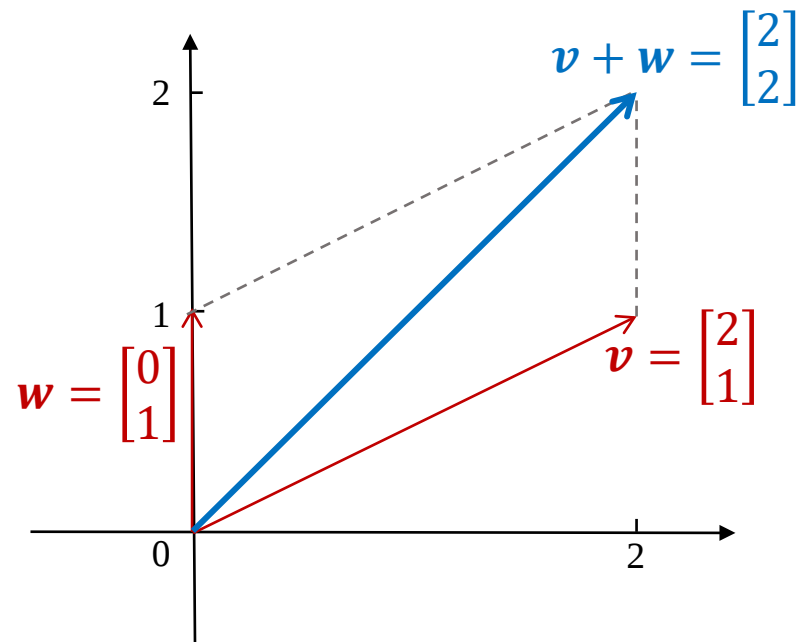
预备知识: 向量的运算

向量的加法:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

几何意义: 平行四边形法则.

力学意义: 分力的合力[矢量] $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



e.g. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

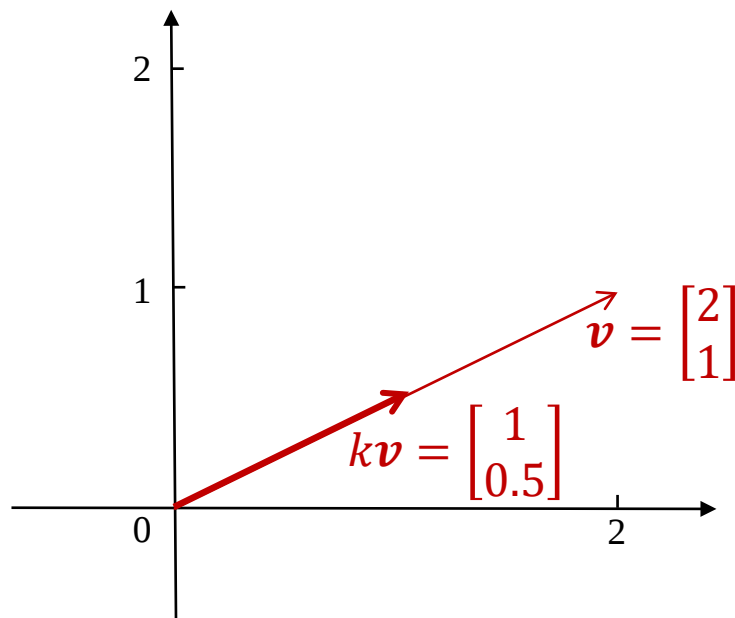
预备知识: 向量的运算

向量的数乘:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$
$$k\boldsymbol{v} = k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}$$

几何意义: 向量的缩放(带方向).

力学意义: 动量[矢量] $m\vec{v}$.



e.g. $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, k = 0.5$

预备知识: 向量的运算

向量的内积 (inner product):

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

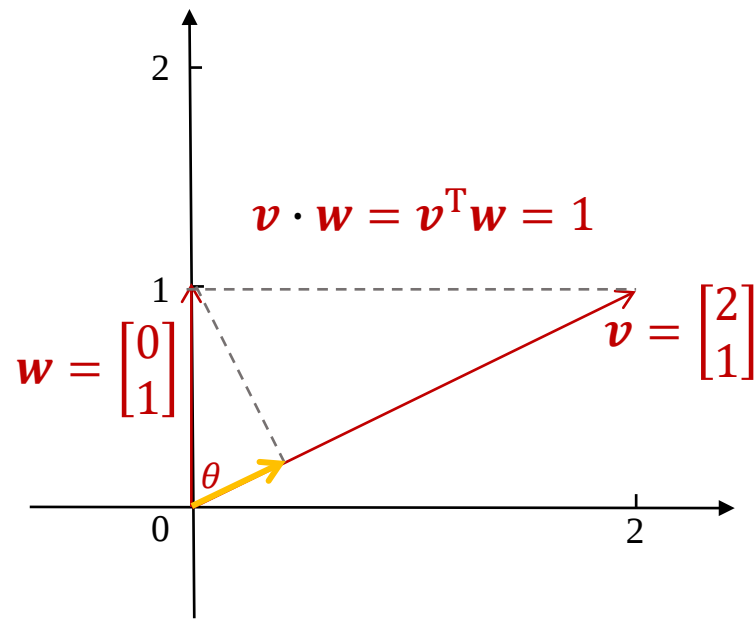
内积的记法1 (向量点乘向量): $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

内积是一个标量

内积的记法2 (行向量乘列向量): $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w} = [a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

几何意义: 向量的投影长度和另一个向量的长度的乘积
(同方向的积).

力学意义: 外力做功[标量] $\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cos \theta |\vec{s}|$.



预备知识: 向量的运算

向量的内积 (inner product):

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

内积是一个标量

内积的记法2 (行向量乘列向量) : $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = [a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

向量 $\mathbf{v}$ 的长度: $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{[a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

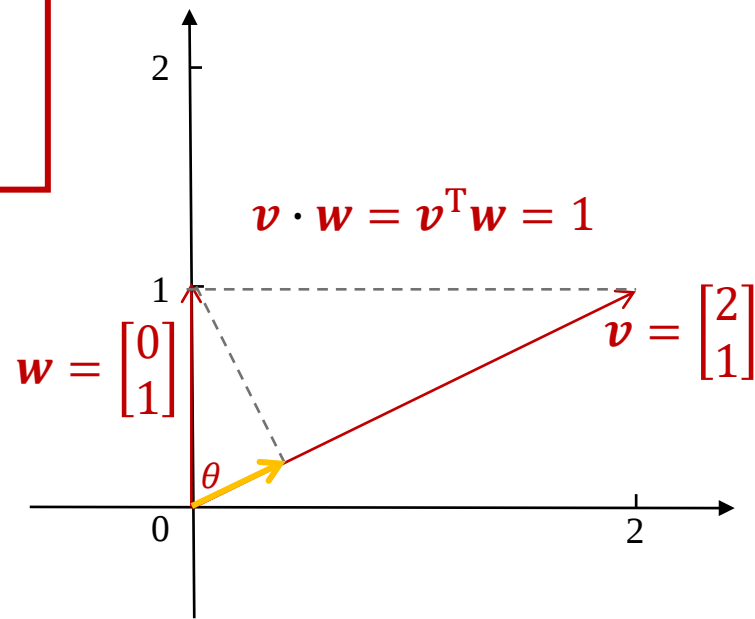
利用内积计算两个向量之间的夹角 : $\cos \theta = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}$

e.g. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 内积 $\mathbf{v}^T \mathbf{w} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{5}, \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} = 1, \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{w}$ 方向上的投影长度: $|\mathbf{v}| \cos \theta = 1$, 内积 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (|\mathbf{v}| \cos \theta) |\mathbf{w}| = 1 |\mathbf{w}| = 1$

$\mathbf{w}$ 在 $\mathbf{v}$ 方向上的投影长度: $|\mathbf{w}| \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 内积 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| (|\mathbf{w}| \cos \theta) = |\mathbf{v}| \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$



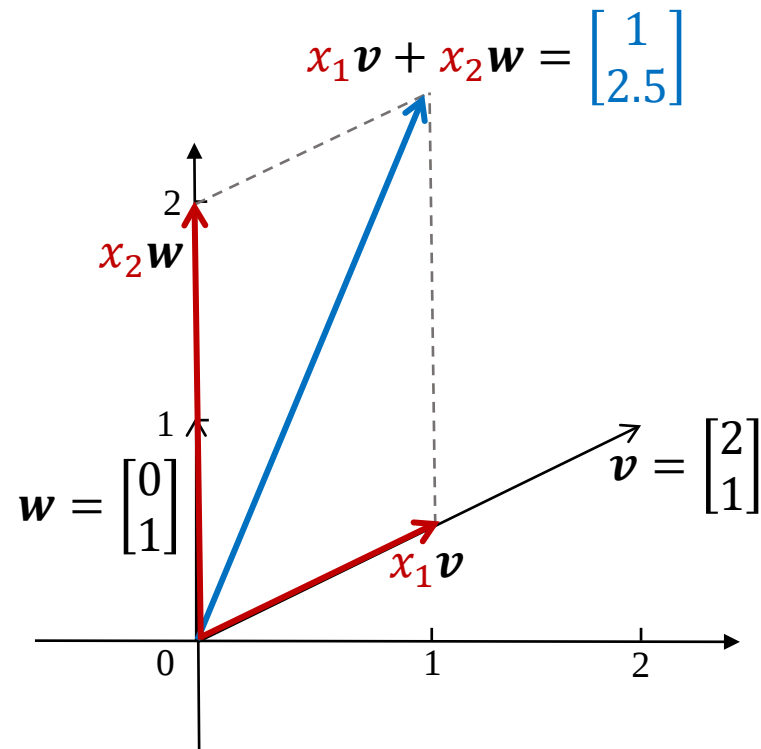
预备知识: 向量的线性组合

向量的线性组合(Linear combination):

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

对向量 $\boldsymbol{v}$ 数乘(缩放) x_1 倍, 对向量 $\boldsymbol{w}$ 数乘(缩放) x_2 倍, 则 $x_1\boldsymbol{v} + x_2\boldsymbol{w}$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 和向量 $\boldsymbol{w}$ 的一个线性组合

$$\begin{aligned} x_1\boldsymbol{v} + x_2\boldsymbol{w} &= x_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} && \text{向量的数乘} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 a_1 \\ x_1 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 b_1 \\ x_2 b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 a_1 + x_2 b_1 \\ x_1 a_2 + x_2 b_2 \end{bmatrix} && \text{向量的加法} \end{aligned}$$



e.g.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5, & \boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & x_1\boldsymbol{v} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ x_2 &= 2.0, & \boldsymbol{w} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & x_2\boldsymbol{w} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

向量的线性组合仍然是向量

预备知识：矩阵

矩阵(Matrix): 矩阵是一个矩形的数表.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵可以看做是向量的“集合”.

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad A = [\boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}] = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例如，矩阵 A 可视为列向量 $\boldsymbol{v}$ 和列向量 $\boldsymbol{w}$ 构成的行向量.

预备知识：矩阵

矩阵右乘列向量：

$$\text{记矩阵 } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \textcolor{red}{x} \text{ 是列向量, } \textcolor{red}{x} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x}_1 \\ \textcolor{red}{x}_2 \end{bmatrix}.$$

矩阵A右乘列向量: $A\textcolor{red}{x}$ 可视为矩阵A的所有列向量的**线性组合**.

$$A = [\textcolor{red}{v} \quad \textcolor{red}{w}]; \quad \textcolor{red}{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \textcolor{red}{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A\textcolor{red}{x} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x}_1 \\ \textcolor{red}{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= [\textcolor{red}{v} \quad \textcolor{red}{w}] \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x}_1 \\ \textcolor{red}{x}_2 \end{bmatrix} = \textcolor{red}{x}_1 \textcolor{red}{v} + \textcolor{red}{x}_2 \textcolor{red}{w} \quad (\text{使用内积的记法2}) \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } \boxed{A\textcolor{red}{x} = \textcolor{red}{x}_1 \textcolor{red}{v} + \textcolor{red}{x}_2 \textcolor{red}{w}}$$

预备知识：矩阵

向量(Vector)和矩阵(Matrix)的来源.

英语词汇Vector和Matrix来自于拉丁语.

Vector :

拉丁语 Vehere: to carry, to transport. (有起点和终点的携带、运输)

Matrix :

拉丁语 Mater: Mother (母亲)

拉丁语 Matrix: 母体

矩阵Matrix是向量Vectors的基底.

什么是线性？

Linear - Line

$f(x) = 2x + 1$ 是线性的吗？

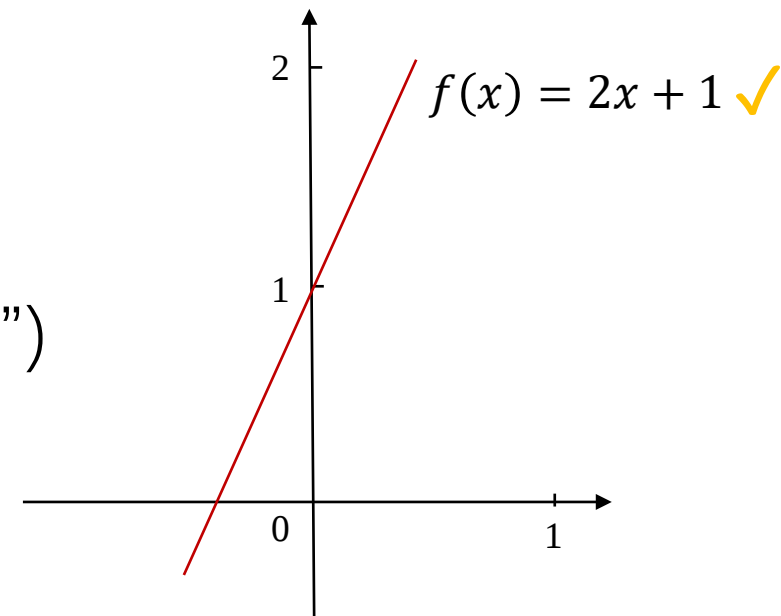
预备知识：线性的定义

• 泛指的“线性”定义：

函数 $f(x)$ 是“线性”的, 可表示为一次函数 $y = f(x) = kx + b$

- 例如：
- 初等数学的“线性函数”，
 - 统计学/经济学的“线性回归”
 - 工程实践中的“线性问题”(相对于“非线性问题”)

几何意义：函数图像是一条直线.



直观理解：泛指的“线性”强调的是变量 x 和变量 y 之间的“关系”.

- 变量(Variable) vs. 变量(Variable) -

预备知识：线性的定义

• 线性代数的范畴内

“线性”的数学定义：函数 $f(x)$ 是**“线性”**的 $\Leftrightarrow$ 同时满足下列2个条件,

(1) 可加性: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

(2) (一次)齐次性: $f(ax) = af(x)$

- 齐次的(homogeneous): 词汇原意是“同种同类(-homo-相同 -gen-种类)”;

数学意义是函数各项的指数次数(次)是相同(齐)的.

e.g. $(x^3 + x^2y)$ 是齐次的; $(x + 1)$ 是非齐次的.

- k 次齐次函数: $f(ax) = a^k f(x)$

e.g. $f(x) = x^3$, $f(ax) = a^3 x^3 = a^3 f(x) \Leftrightarrow f(x) = x^3$ 是三次齐次函数;

$f(x) = 2x$, $f(ax) = a(2x) = af(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x$ 是一次齐次函数;

“线性”的等价定义：函数 $f(x)$ 是**“线性函数”** $\Leftrightarrow f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$

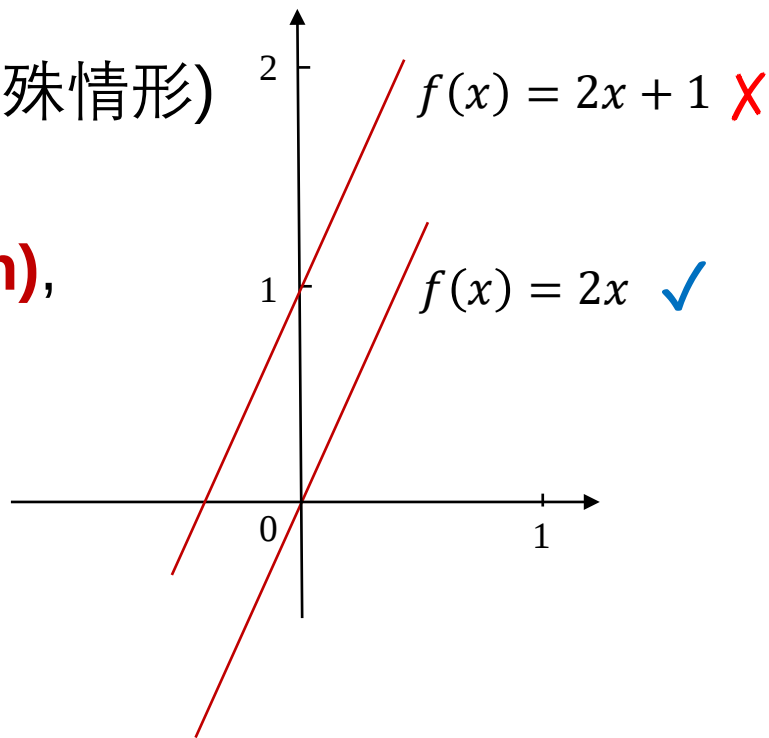
推论：如果 $f(x)$ 是“线性函数”，则 $f(0) = 0$ ，即 $f(x)$ 必须经过原点.

预备知识：线性的定义

- 在线性代数中, 函数 $f(x) = kx + b, (b \neq 0)$ 不是线性的; $f(x) = kx$ 是线性的.
- 向量的“线性函数”： $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

(注意: A 代表矩阵, 粗体的 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 代表向量.

一次函数 $f(x) = kx$ 是 x 为一维向量, 即标量的特殊情形)



直观理解: “线性函数”是一种**线性变换(Linear transformation)**,
定义的是从向量(空间)到向量(空间)的“变换”.
- 向量(空间) $\rightarrow$ 向量(空间) -

几何意义: 向量(空间)的旋转、翻折、缩放是线性变换.
平移不是线性变换.

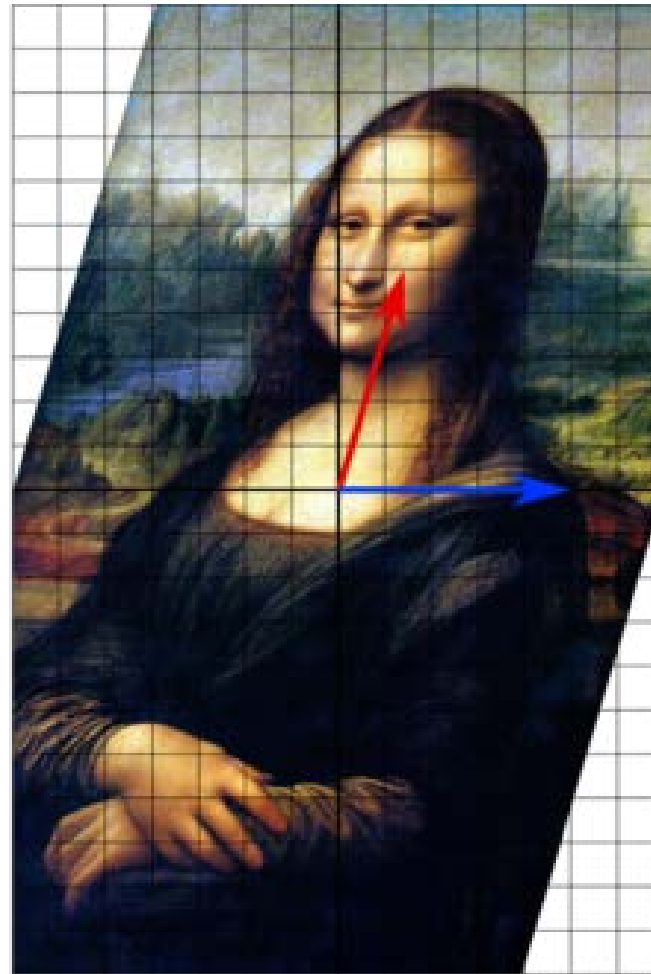
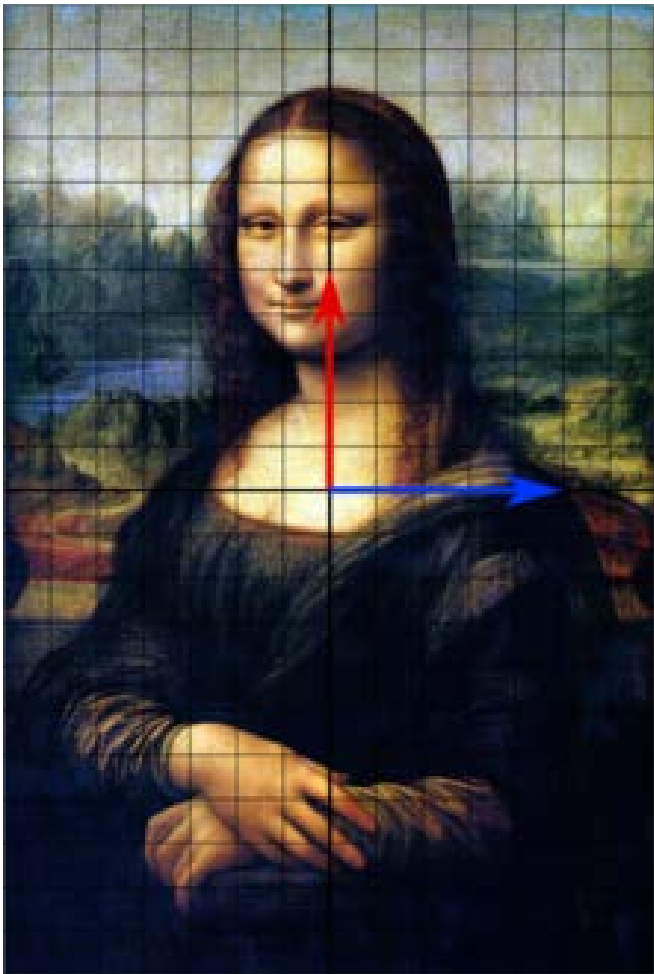
两种定义的区别:

泛指的“线性”：强调变量和变量之间的“**线性关系**”. - 变量 vs. 变量 -

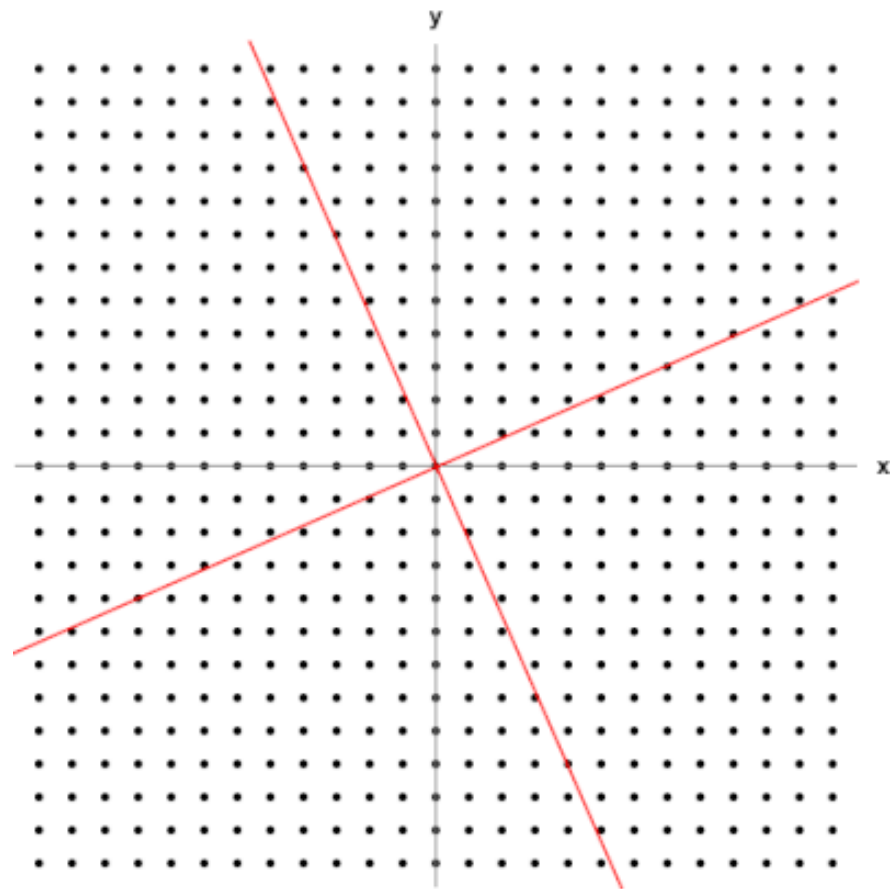
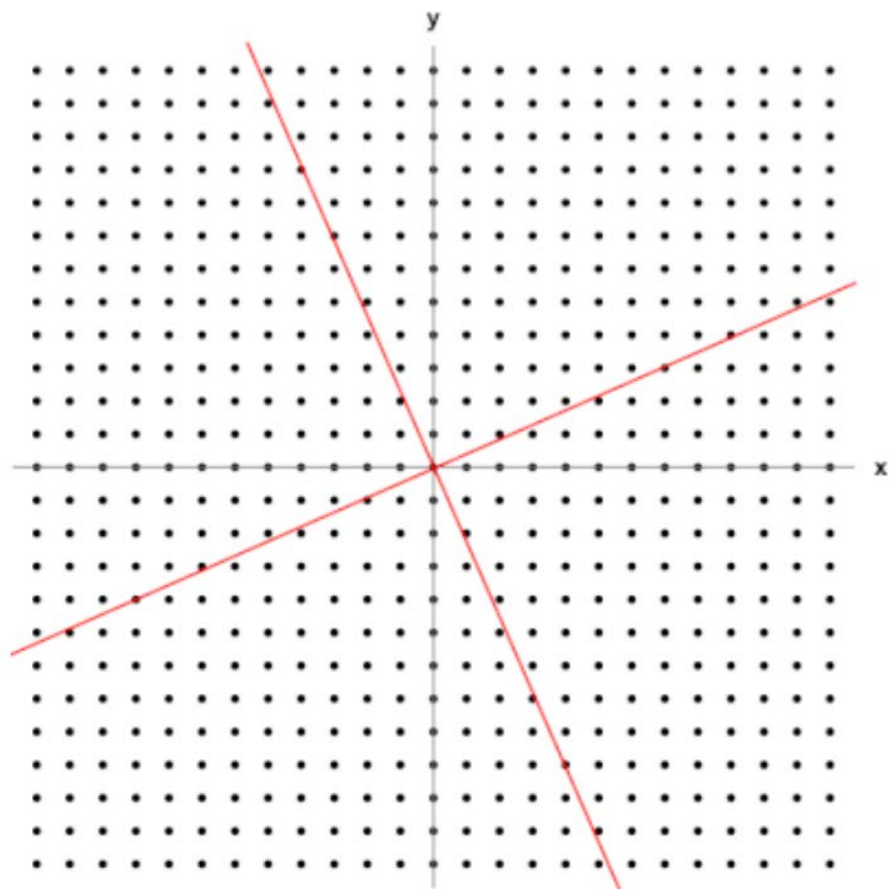
线性代数中的“线性”：向量空间到向量空间的“**线性变换**”. - 向量(空间) $\rightarrow$ 向量(空间) -

务必注意: 不同语境下的“线性”, 避免混淆概念.

线性变换



线性变换



线性方程组的向量(线性组合)形式

- 重新认识线性方程组

- 求解二元一次方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{向量形式}} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(未知数 x_1, x_2)

- 寻找标量 x_1, x_2 满足等式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- 寻找标量 x_1, x_2 使得向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的线性组合 $x_1 \mathbf{v} + x_2 \mathbf{w}$ 满足等式:

$$\boxed{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}} \quad (\text{列向量的线性组合})$$
$$x_1 \mathbf{v} + x_2 \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

线性方程组的向量(线性组合)形式

- 寻找标量 x_1, x_2 使得向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的线性组合 $x_1\mathbf{v} + x_2\mathbf{w}$ 满足等式:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

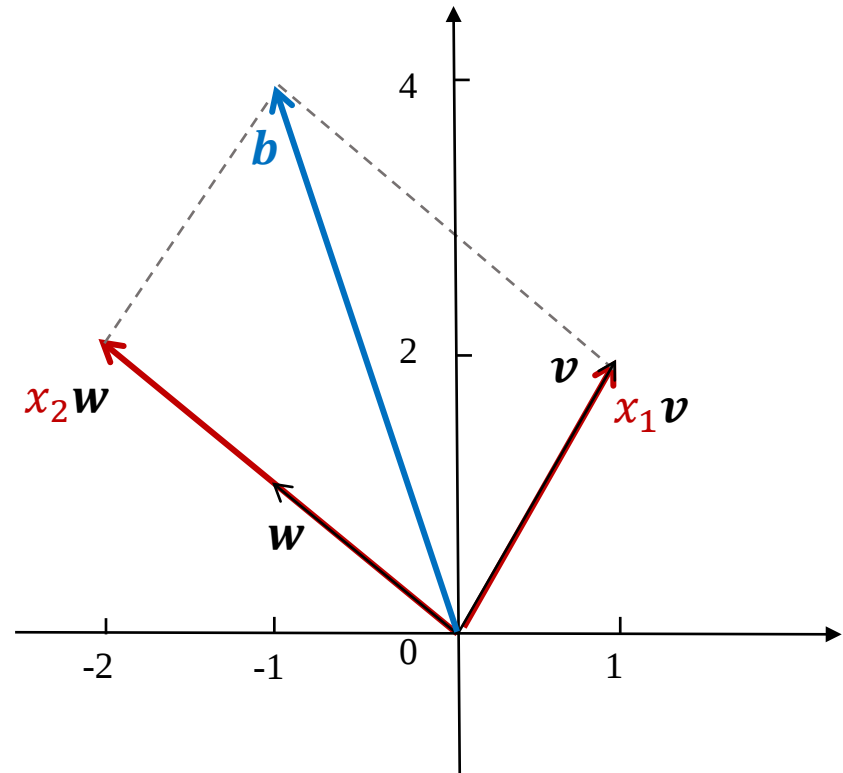
(线性方程组的向量形式)

$$x_1 \mathbf{v} + x_2 \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

线性组合： $x_1\mathbf{v} + x_2\mathbf{w} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solution: $x_1 = 1, x_2 = 2$



线性方程组的矩阵形式($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)

- 寻找标量 x_1, x_2 使得向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的线性组合 $x_1\mathbf{v} + x_2\mathbf{w}$ 满足等式:

等价于

- 寻找解向量 $\mathbf{x}$, 满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

记矩阵 $A = [\mathbf{v} \quad \mathbf{w}]$, 解向量 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

则 $A\mathbf{x} = [\mathbf{v} \quad \mathbf{w}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{v} + x_2\mathbf{w}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{列向量的线性组合})$$

$$x_1 \mathbf{v} + x_2 \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{v} + x_2\mathbf{w}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (\text{线性方程组的矩阵形式 } A\mathbf{x} = \mathbf{b})$$

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

回顾: $A\mathbf{x}$ 等价于矩阵 A 中列向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的线性组合:

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{v} + x_2\mathbf{w}$$

线性方程组的矩阵形式

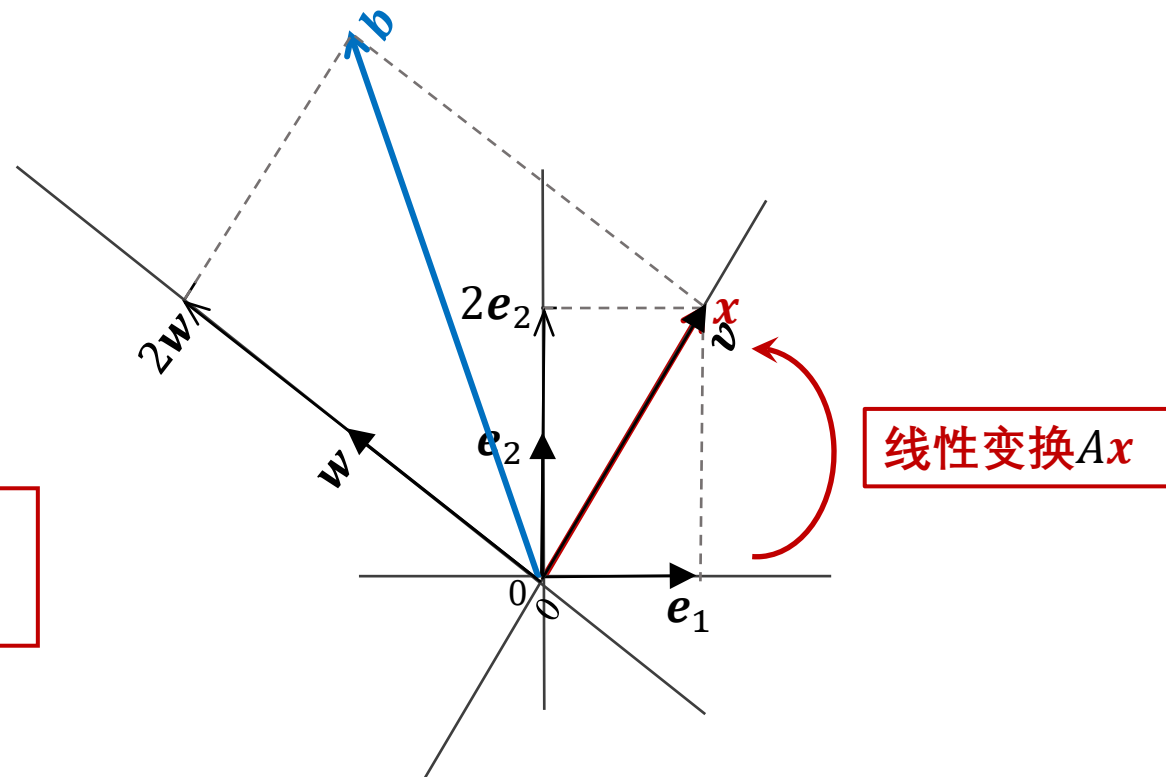
• 重新认识线性方程组

二元一次方程组:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

(线性方程组的矩阵形式)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b}$$



直观总结: 以线性变换的观点来看待**线性方程组**.

(1) 矩阵乘向量 $A\mathbf{x}$ 本质上是一个线性函数 $f(\mathbf{x})$, 其几何意义是对向量空间的线性变换. (可验证: $A\mathbf{x}$ 满足“可加性”+ “齐次性”.)

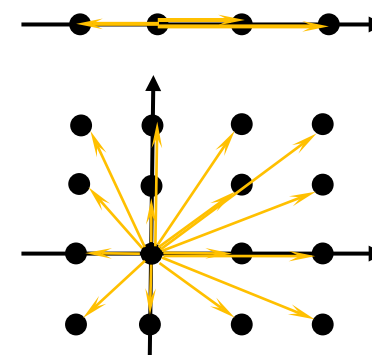
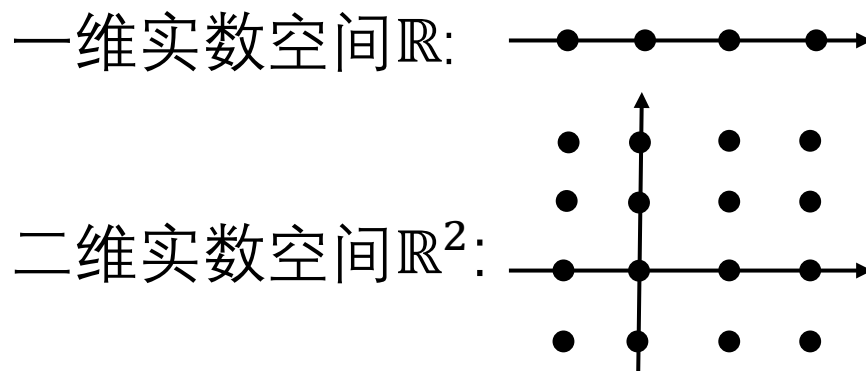
(2) 求解线性方程组 $\Leftrightarrow$ 寻找解向量 $\mathbf{x}$ 满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

初识向量空间

• 一点拓展: 向量空间 (Spaces of Vectors)

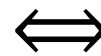
(1) 什么是空间(space)? [在数学的语境中]

- 空间是一个可以被定义的集合(set).
- e.g. 实数的 n 元组的全体构成: 实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维实数空间 $\mathbb{R}^n$



直观理解:

图像上的所有点可以充满整个空间.



定义从原点到 n 元组的向量, $\mathbb{R}^n$ 是一个向量空间.
等价于: 图像上的所有向量可以充满整个向量空间.

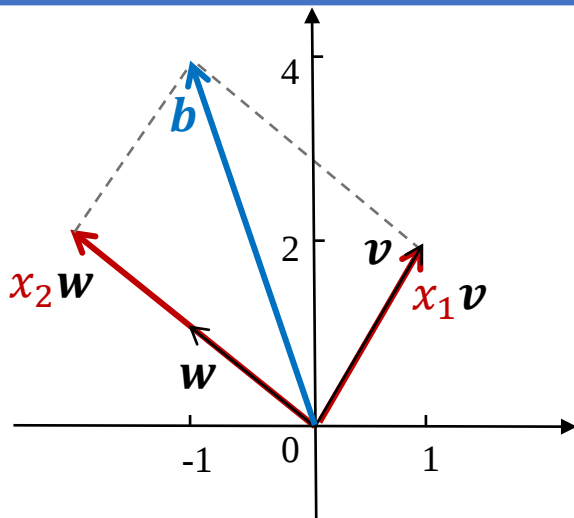
初识向量空间

(2) 什么是向量空间(Spaces of Vectors)?

- 直观解释: 向量空间是向量的集合, 且在其中可以同时定义: a. 向量的加法, b. 向量的数乘(缩放).
- 思考: 给定一对实数域上的2维向量 v 和 w , 对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 其线性组合 $\{x_1 v + x_2 w\}$ 可以张成向量空间 $\mathbb{R}^2$ 吗?

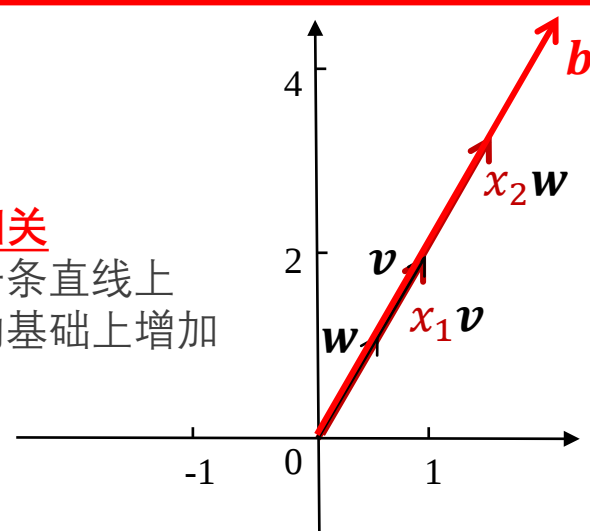
Yes

向量 v 和向量 w 线性无关
=向量 v 和向量 w 不共线
=向量 v 和向量 w 相互独立



No

向量 v 和向量 w 线性相关
=向量 v 和向量 w 在同一条直线上
=向量 v 没有在向量 w 的基础上增加额外信息



如果2维向量 v 和向量 w 线性无关, 则对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 其线性组合 $\{x_1 v + x_2 w\}$ 可以张成向量空间 $\mathbb{R}^2$, 称向量 v 和向量 w 是该向量空间的一组基(basis)向量.

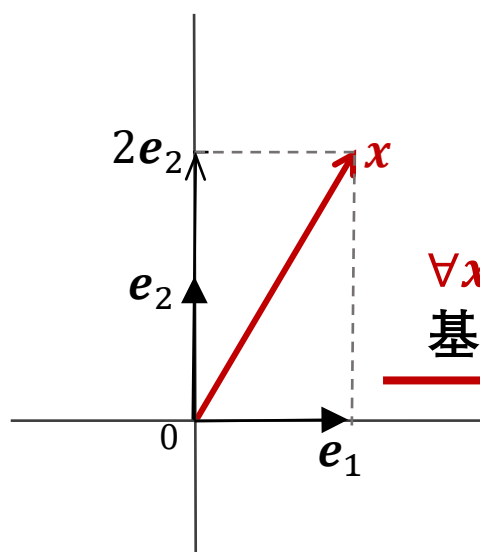
直观理解: (标准)基向量就是“(直角)坐标轴”. (向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的标准基 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$)

向量空间的线性变换

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b}$$

$$A = [\mathbf{v} \quad \mathbf{w}], \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

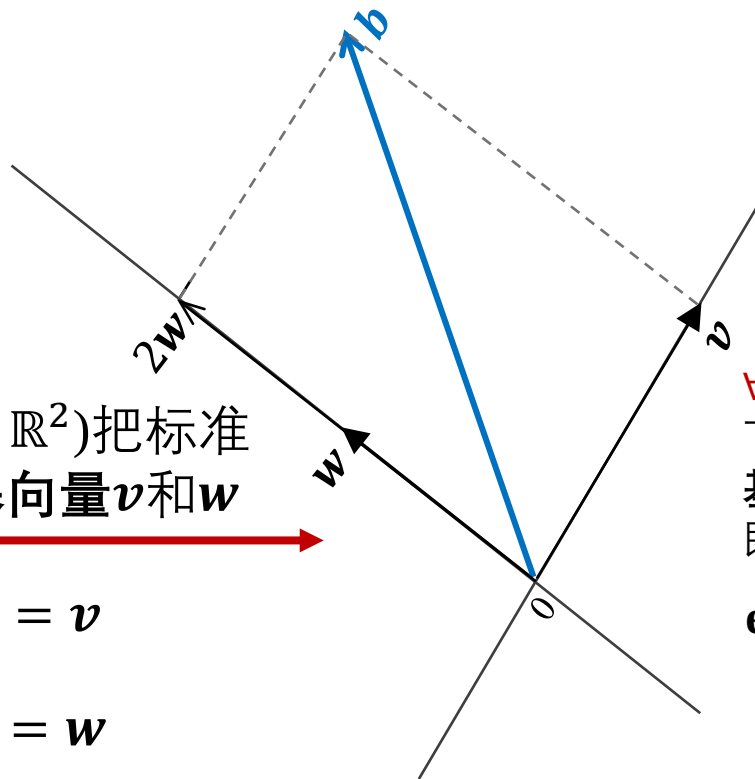


$\forall \mathbf{x}$, 线性变换 $A\mathbf{x}$ ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$) 把标准基向量 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 变换为基向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$

$$A\mathbf{e}_1 = [\mathbf{v} \quad \mathbf{w}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

$$A\mathbf{e}_2 = [\mathbf{v} \quad \mathbf{w}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{w}$$

$\forall \mathbf{x}$, 当基向量是 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 时,
 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$



$\forall \mathbf{x}, \mathbf{b} = A\mathbf{x}$ 在基向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 下的“坐标”，等于 $\mathbf{x}$ 在标准基向量 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 下的“坐标”，即“相对坐标”不变。

e.g. $\mathbf{x} = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$
 $\mathbf{b} = 1\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

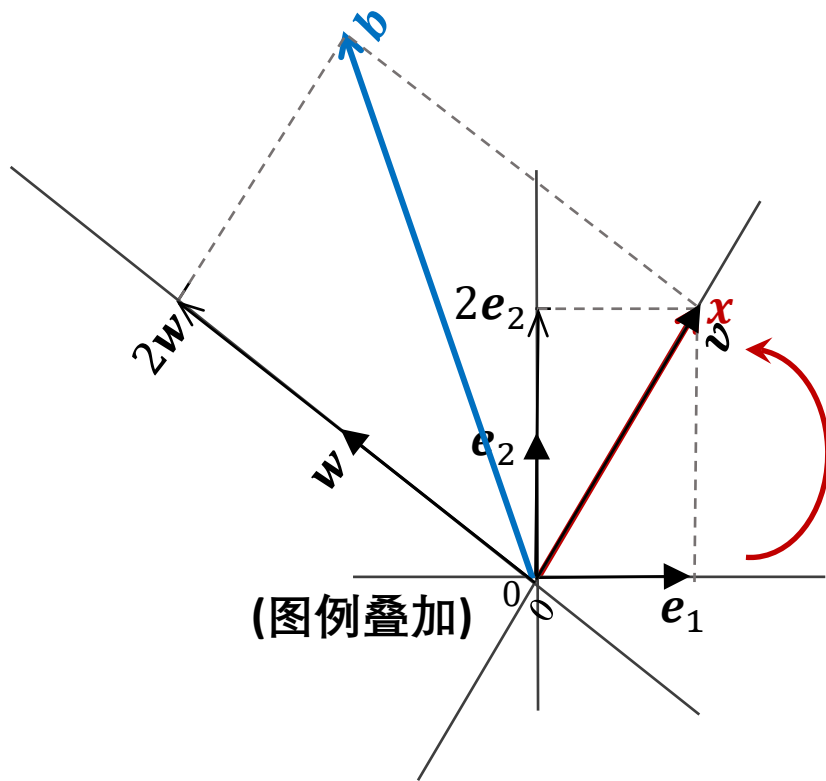
$\forall \mathbf{x}$, 经过线性变换 $A\mathbf{x}$, 基向量变换为 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$.
 $\mathbf{b} = A\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v} + x_2 \mathbf{w}$

向量空间的线性变换

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{b}$$

$$A = [\mathbf{v} \quad \mathbf{w}], \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$



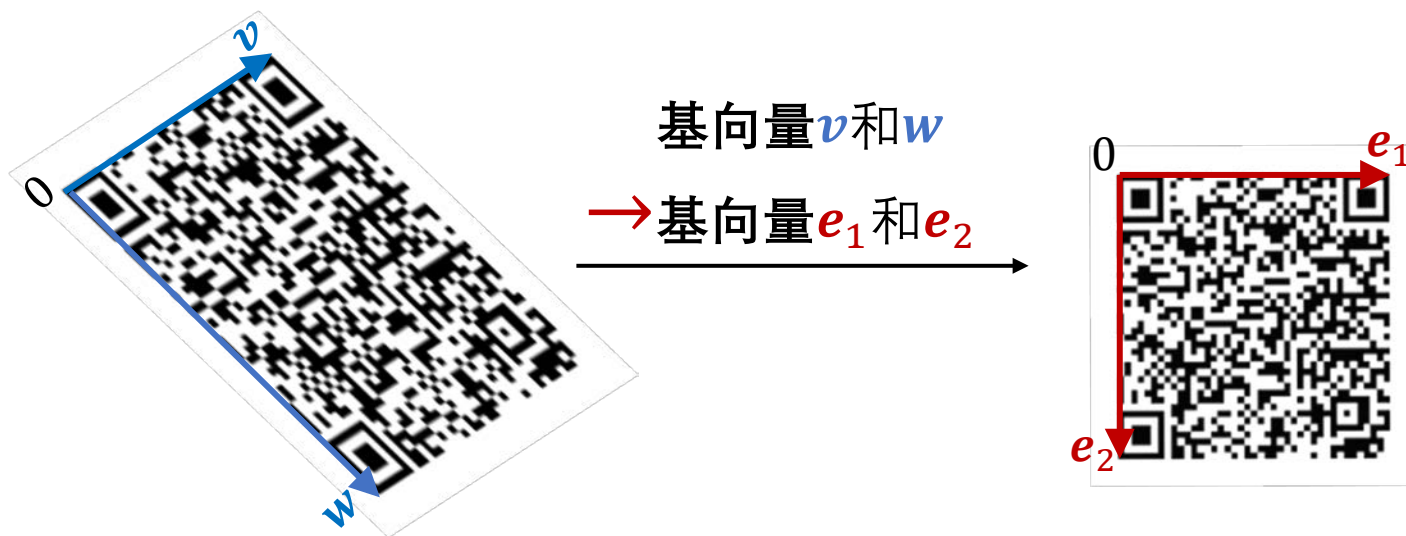
线性变换 $A\mathbf{x}$: 向量空间(坐标网格)的旋转+缩放.
向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的基向量 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$
 $\rightarrow$ 向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的基向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$.
线性变换 $A\mathbf{x}$ 不改变原点, $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

注: 零向量 $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

向量空间的线性变换

e.g. 二维码图像处理

(注：计算机图像的原点在左上角)



矩阵的特征向量

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A \quad \textcolor{red}{x} \quad \longrightarrow \quad \lambda \textcolor{red}{x}$$

$$A = [\mathbf{v} \quad \mathbf{w}], \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

英语词缀 **Eigen-** 来自于德语.

Eigen: own, self.

Eigenvector: Matrix's own vector.

Eigenvalue: Matrix's own value.

(特征值有时也被翻译成**本征值**)

(Eigenvector)

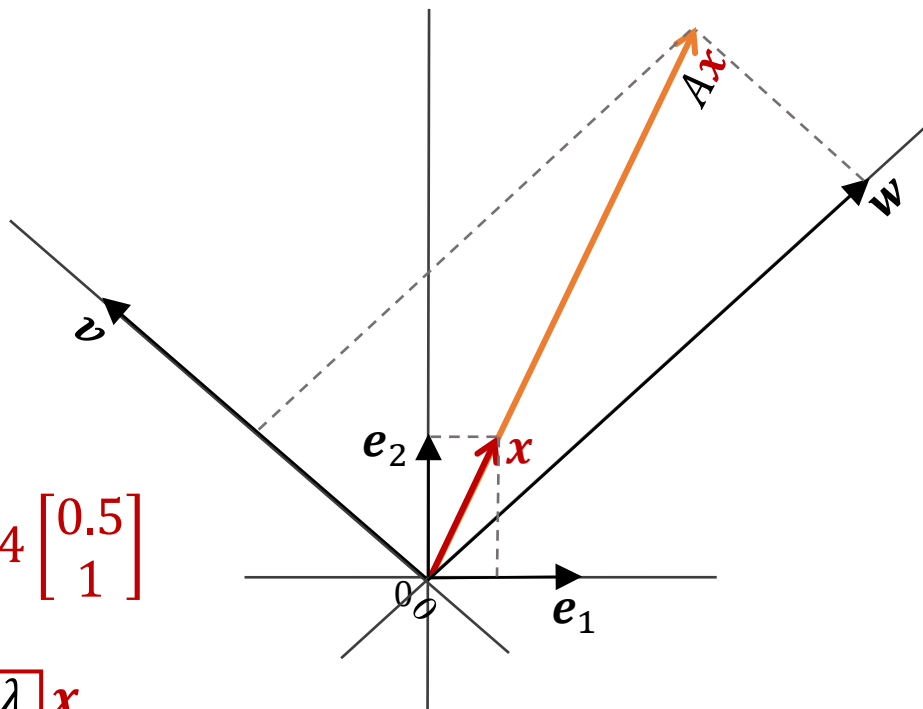
矩阵A的特征向量：存在特定的向量 x ，
经过线性变换 Ax 之后的得到的向量
仍然在 x 的方向上。

e.g. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

矩阵A的特征向量： $x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，满足 $Ax = 4 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

(Eigenvalue)

(Eigenvalue)
 矩阵 A 的 特征值 λ : $A\mathbf{x} = \boxed{\lambda}\mathbf{x}$
 $= 4$



$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= 0.5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \\ A\mathbf{x} &= 0.5\mathbf{v} + 1\mathbf{w} = 4(0.5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Homework

- 复习课件: AA170_ Lecture 01
- 完成作业: AA170_HW1