

AA170 Homework#1 Solution

Q1: (1) 向量长度:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}} = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}} \\ &= \sqrt{1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{w}| &= \sqrt{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{w}} = \sqrt{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \\ &= \sqrt{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

(2) 向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的内积:

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 间的夹角:

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}| |\boldsymbol{w}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Q2: (1)

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2)

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 包含列向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$A\mathbf{x} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 是矩阵 A 的列向量的线性组合;

几何上可视为分向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 伸长 2 倍 + 分向量 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 缩短 0.5 倍的合向量 $\begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$.

Q3: 改写线性方程组

(1) 列向量的线性组合

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(2) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$