Spring 2024

AA170

线性代数
Linear Algebra

Lecture 2

- 矩阵算术
- 矩阵代数

肖啸

回顾: 向量的内积

向量的内积 (inner product):

列向量写法: $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$; (**向量**默认是列向量)

行向量写法: $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=[a_1\quad a_2],\quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}=[b_1\quad b_2]$

向量的内积记法1 (向量**点乘**向量)： $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$

向量的内积记法2 (**行向量乘列向量**) ： $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=[a_1\quad a_2]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$

$$[-\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\ -]\begin{bmatrix}|\\\boldsymbol{w}\\|\end{bmatrix}$$

向量的内积是一个标量

性质: $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$$

$$[a_1\quad a_2]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=a_1b_1+\ a_2b_2=[b_1\quad b_2]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$$

矩阵的定义

- 矩阵的定义: 矩阵是一个矩形的数表.
- 矩阵的记法: (1) 一个m行n列的矩阵称为$m \times n$矩阵.

  (2) 矩阵A的第i行第j列的元素, 记为a_{ij}; 矩阵A可记为$A=(a_{ij})$.

  或 $(a_{ij})_{m\times n}$

  元素a_{ij}亦可记做A_{ij}

$$
A=\left.\overbrace{\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{第}j\text{列} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}}^{n\text{列}}\right\} m\text{行}
$$

特殊矩阵

- 零矩阵(Zero Matrix): 元素全是0的$m \times n$矩阵是一个零矩阵, 记为$\mathbf{0}$.
- 方块矩阵(Square Matrix): 行数和列数相同的矩阵($n \times n$矩阵).
- 对角矩阵(Diagonal Matrix): 除主对角线之外的元素皆为0的矩阵, 记为D.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & & & & & \\ & d_{22} & & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & d_{ii} & & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

- 单位矩阵(Identity Matrix): 主对角线上的元素全是1的矩阵是, 记为I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

特殊矩阵

- 上三角矩阵(Upper Triangular Matrix): 记为U, $a_{ij}=0(i>j)$

$$U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 下三角矩阵(Lower Triangular Matrix): 记为L, $a_{ij}=0(i<j)$

$$L=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

特殊矩阵

- 对称矩阵(Symmetric Matrix): 记为S, $s_{ij} = s_{ji}$

$\boxed{\text{对称矩阵是方块矩阵}}$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & & s_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{e.g.} \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵的转置

- 矩阵转置的**定义**: 设矩阵A=(a_{ij})是$m \times n$矩阵, 则定义矩阵A的

(**Transpose of a matrix**) 转置矩阵为$A^T = (a_{ji})$, A^T是一个$n \times m$矩阵.

e.g. $A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 2×3

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{2} & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 3×2

$A_{12} = (A^T)_{21} = 2$

转置: 矩阵A的元素A_{ij} = 矩阵A^T的元素$(A^T)_{ji}$

OR $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

矩阵的转置

转置: 矩阵A的第j列⟶矩阵A^T第j行
OR 矩阵A的第i行⟶矩阵A^T第i列

设$m \times n$矩阵A (m行, n列)

把矩阵A视作**列向量**的集合: $A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} - \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}} - \\ - \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}} - \\ \vdots \\ - \boldsymbol{a}_n{}^{\mathrm{T}} - \end{bmatrix}$

(一共n列, 记第j列是$\boldsymbol{a}_j$)

e.g. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $A = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right] \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} [1 & 0] \\ [2 & 3] \\ [0 & 4] \end{bmatrix}$

矩阵的转置

转置: 矩阵A的第j列⟶矩阵A^T第j行
OR 矩阵A的第i行⟶矩阵A^T第i列

设$m \times n$矩阵A (m行, n列)

把矩阵A视作行向量的集合: $A = \begin{bmatrix} - \boldsymbol{a_1}^{\mathrm{T}} - \\ - \boldsymbol{a_2}^{\mathrm{T}} - \\ \vdots \\ - \boldsymbol{a_m}^{\mathrm{T}} - \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $A^T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

(一共m行, 记第i行是$\boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}$)

e.g. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} [1 & 2 & 0] \\ [0 & 3 & 4] \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $A^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

矩阵的转置

- 矩阵转置的**性质**: $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

  (重要)

  设矩阵A是$m \times n$矩阵, 矩阵B是$n \times p$矩阵,
  则$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

- 矩阵转置的**性质**: 设矩阵S是对称矩阵, 则$S^{\mathrm{T}} = S$.

- 矩阵转置的**性质**: 设矩阵A是$m \times n$矩阵, 则$A^{\mathrm{T}}A$和$A\ A^{\mathrm{T}}$是对称矩阵

矩阵的转置

- 矩阵转置T的**数学意义**: **“合并同类项”** $A\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的内积 $=$ $\boldsymbol{x}$与$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$的内积

(Transpose of a matrix)

$$(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})$$

e.g. $A = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_1 - y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (-x_1 + x_2)y_1 + (-x_2 + x_3)y_2$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) = (-y_1)x_1 + (y_1 - y_2)x_2 + (y_2)x_3$$

矩阵的加法

- **矩阵的加法**: 设矩阵$A=(a_{ij})$和矩阵$B=(b_{ij})$是$m \times n$矩阵, 则:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

- 矩阵相加的必要条件: 两个矩阵的行数和列数**相等**.

e.g.
$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}}+\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}=\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}}$$

矩阵加法的性质

- **矩阵加法的性质**: 对于任意的$m \times n$矩阵A, B, C, 满足以下性质:

(1) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$; − 与相加的**次序**无关 −
(Associative law) **(Sequence)**

(2) 交换律: $A + B = B + A$; − 与相加的**顺序**无关 −
(Commutative law) **(Order)**

(3) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$; (零矩阵$\mathbf{0}$)

(4) $A + (-A) = \mathbf{0}$. (负矩阵$-A = (-a_{ij})$)

- **矩阵减法的定义**: $A - B = A + (-B)$.

矩阵的数乘

- **矩阵的数乘**: 设矩阵A=(a_{ij})是$m \times n$矩阵, $k \in \mathbb{R}$是常数, 则:

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}$$

e.g. $$3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\ 6 & 2\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

矩阵数乘的性质

- 矩阵**数乘**的性质: 对于任意的$m \times n$矩阵A, B, 和任意常数$k, l \in \mathbb{R}$, 满足以下性质:

(1) 结合律: $(kl)A = k(lA)$;

(Associative law)

(2) 交换律: $kA = Ak$;

(Commutative law)

(3) 分配律: $(k + l)A = kA + lA$;

(Distributive law)

(4) $1A = A$.

矩阵的乘法(方法1：用向量的内积来定义)

- **矩阵的乘法**: 设矩阵A是$m\times n$矩阵, 矩阵B是$n\times p$矩阵,

  定义矩阵$C=AB$, 则矩阵C=(c_{ij})是$m\times p$矩阵.

$$\text{其中}, c_{ij}=(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

i.e. (AB) 的第i行第j列的的元素c_{ij} $=A$的第i行$\cdot B$的第j列

(A行与B列的向量内积)

- 矩阵相乘的<u>充要条件</u>: 矩阵A和矩阵B可乘, 当且仅当矩阵A的列数n<u>等于</u>矩阵B的行数n.

$$m\text{行}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m\times n}\right. \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}}^{p\text{列}}}_{n\times p} = \left.\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ \cdots & & c_{ij} & & \cdots \\ & & \vdots & & \end{bmatrix}}^{p\text{列}}}_{m\times p}\right\}m\text{行}$$

矩阵的乘法(方法1：用向量的内积来定义)

等价描述: “矩阵**A的每一行(向量)** 乘 矩阵**B的每一列(向量)**”

把矩阵A视作**行向量**的集合: $A = \begin{bmatrix} - \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}} - \\ - \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}} - \\ \vdots \\ - \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}} - \end{bmatrix}$ (一共m行, 记第i行是$\boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}$)

把矩阵B视作**列向量**的集合: $B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}$(一共$p$列, 记第$j$列是$\boldsymbol{b}_j$)

$$\boxed{(AB)_{ij} = \boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_j}$$

$$AB = \begin{bmatrix} - \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}} - \\ - \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}} - \\ \vdots \\ - \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}} - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}$$

矩阵的乘法(方法1：用向量的内积来定义)

- 算例1: 矩阵的乘法(利用向量的内积)

$$AB=\begin{bmatrix} -\ \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\ - \\ -\ \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\ - \\ -\ \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\ - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$$

首先确定矩阵的大小!

[A的行向量] [B的列向量]

$$\begin{bmatrix} -\ \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\ - \\ -\ \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\ - \\ -\ \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\ - \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{bmatrix}\qquad AB=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times\boxed{2}}{\overset{A}{\begin{bmatrix}1&2\\2&1\\3&1\end{bmatrix}}}\ \underset{\boxed{2}\times 2}{\overset{B}{\begin{bmatrix}2&5\\0&1\end{bmatrix}}}=\begin{bmatrix}[1&2]\\ [2&1]\\ [3&1]\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}[1\ \ 2]\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & [1\ \ 2]\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\\ [2\ \ 1]\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & [2\ \ 1]\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\\ [3\ \ 1]\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} & [3\ \ 1]\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}2&7\\4&11\\6&16\end{bmatrix}}$$

矩阵的乘法(方法1：用向量的内积来定义)

- 算例2: 矩阵的乘法(利用向量的内积)

首先确定矩阵的大小!

$$AB=\begin{bmatrix}-\ \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\ -\end{bmatrix}\begin{bmatrix}|\\\boldsymbol{b}_1\\|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\end{bmatrix}$$

[A的行向量] [B的列向量]

$$\begin{bmatrix}-\ \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ \boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\ -\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}|\\\boldsymbol{b}_1\\|\end{bmatrix}\qquad AB=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{a}_3{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\end{bmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1&3\\3&5\\5&7\end{bmatrix}}\ \overset{B}{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}[1&3]\\ [3&5]\\ [5&7]\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}[1\ \ 3]\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\\ [3\ \ 5]\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\\ [5\ \ 7]\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\11\\17\end{bmatrix}$$

$3\times\boxed{2}$ $\quad\boxed{2}\times 1$ $\quad 3\times 1$

矩阵的乘法(方法1：用向量的内积来定义)

- 算例3: 矩阵的乘法(利用向量的内积)

首先确定矩阵的大小!

行向量是$1 \times n$矩阵 (只有1行)

列向量是$m \times 1$矩阵 (只有1列)

[A的行向量] [B的列向量]

$$\begin{bmatrix} - \boldsymbol{a_1}^{\mathrm{T}} - \\ - \boldsymbol{a_2}^{\mathrm{T}} - \\ - \boldsymbol{a_3}^{\mathrm{T}} - \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \\ | & | \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{a_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{a_3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b_2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} [-1-] \\ [-2-] \\ [-3-] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ 2 \\ | \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} | \\ 1 \\ | \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1-]\begin{bmatrix} | \\ 2 \\ | \end{bmatrix} & [-1-]\begin{bmatrix} | \\ 1 \\ | \end{bmatrix} \\ [-2-]\begin{bmatrix} | \\ 2 \\ | \end{bmatrix} & [-2-]\begin{bmatrix} | \\ 1 \\ | \end{bmatrix} \\ [-3-]\begin{bmatrix} | \\ 2 \\ | \end{bmatrix} & [-3-]\begin{bmatrix} | \\ 1 \\ | \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$3 \times \boxed{1}$ $\quad \boxed{1} \times 2$ $\quad 3 \times 2$

向量的外积: $\boldsymbol{xy}^{\mathrm{T}}$

矩阵的乘法(方法2：向量的线性组合的集合)

- 回顾: 矩阵A右乘单个向量$\boldsymbol{x}$ = (一个向量)

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$A\boldsymbol{x}$是矩阵A的列向量的线性组合:

$$A\boldsymbol{x} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{a}_1 \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{a}_2 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ \boldsymbol{a}_n \\ | \end{bmatrix}$$

e.g.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

矩阵的乘法(方法2：向量的线性组合的集合)

矩阵A依次右乘**多个向量**$\boldsymbol{b}_j$ = [多个向量($A\boldsymbol{b}_j$)]

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AB = A\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix}}$$

矩阵乘法的第2种理解:

AB**的每一列**$A\boldsymbol{b}_j$都是矩阵A的列向量$\boldsymbol{a}_i$**的线性组合**.

(矩阵A的列向量$\boldsymbol{a}_i$**的线性组合**的**集合**)

矩阵的乘法(方法2：向量的线性组合的集合)

- 算例4: 矩阵的乘法(向量线性组合的集合)

$$\boxed{AB = A[\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2] = [A\boldsymbol{b}_1 \quad A\boldsymbol{b}_2]}$$

[B的列向量]

$$\begin{bmatrix} | & | \\ \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} | & | \\ A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \left[\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 11 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法的性质

- 矩阵乘法的性质: 对于任意的$m \times n$矩阵A, 和矩阵B, C使得下列运算有定义, 则矩阵乘法满足以下性质:

(1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$;

(2) 左分配律: $A(B + C) = AB + AC$;

(3) 右分配律: $(B + C)A = BA + CA$;

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$; $(\forall k \in \mathbb{R})$

(5) $I_m A = A = AI_n$. ($n \times n$单位矩阵I_n)

交换律?: $AB\ ?= BA$

初等行变换：置换矩阵(2×2)

- 置换矩阵: $P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$;　设矩阵$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

(Permutation Matrix)

$\boldsymbol{AP}$交换矩阵A的列: $\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{P}}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}=\underset{\boldsymbol{AP}}{\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix}}$

$\boldsymbol{PA}$交换矩阵A的行: $\underset{\boldsymbol{P}}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}}=\underset{\boldsymbol{PA}}{\begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}}$

交换律?: $AB\ ?= BA$

$\rightarrow AP \neq PA$ (反例)

矩阵乘法
不存在交换律

初等行变换：置换矩阵(行操作,列操作)

$\boldsymbol{AP}$交换矩阵A的列:

矩阵A右乘P

$$\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{P}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{\boldsymbol{AP}}{\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}}$$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{PA}$交换矩阵A的行:

矩阵A左乘P

$$\underset{\boldsymbol{P}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \underset{\boldsymbol{PA}}{\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$$

矩阵A右乘[|]: 对矩阵A的各列进行操作

e.g. $A\boldsymbol{x}$: 矩阵A的列向量的**线性组合**
e.g. AP: 矩阵A的两列**交换**.

[−]左乘矩阵A: 对矩阵A的各行进行操作

e.g. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A$: 矩阵$A$的行向量的**线性组合**
e.g. PA: 矩阵A的两行**交换**.

重要应用: 矩阵的初等(行)变换
求解线性方程组(高斯消元)

初等行变换：置换矩阵($n\times n$)

(**P**ermutation Matrix)

- **置换矩阵**P_{ij}: 交换**单位矩阵**I的第i行和第j行而得出.

  $P_{ij}A$: 交换**任意矩阵**A的第i行和第j行.

$$I=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{2nd row}\\\text{3rd row}\end{matrix}\quad\Rightarrow P_{23}=\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&1&&\\&&&1\end{bmatrix}$$

$P_{23}A$: 使矩阵A的第2行和第3行互换.

$$\underset{P_{23}}{\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&1&&\\&&&1\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}-\ a_1{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ a_2{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ a_3{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ a_4{}^{\mathrm{T}}\ -\end{bmatrix}}=\underset{P_{23}A}{\begin{bmatrix}-\ a_1{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ a_3{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ a_2{}^{\mathrm{T}}\ -\\-\ a_4{}^{\mathrm{T}}\ -\end{bmatrix}}\begin{matrix}\text{2nd row}\\\text{3rd row}\end{matrix}$$

初等行变换：消元矩阵

(Elimination Matrix)

- 消元矩阵$E_{ij}(i > j)$: 在**单位矩阵**I的i-th row, j-th col位置取值e_{ij}.

$E_{ij}A$: 使矩阵A的元素$a_{ij} \to 0$ (消元).

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ e_{31} = ? & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$E_{31}A$: 消元a_{31}

$$\underset{E_{31}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} = \underset{E_{31}A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{0} & (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12}) & (a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13}) \end{bmatrix}}$$

习题选讲: 矩阵的性质

- 证明: 对于任意$m \times n$矩阵A, AA^T和$A^T A$是**对称矩阵**.

对称矩阵: $S^T = S$
$(s_{ij} = s_{ji})$

e.g. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

(1) AA^T:
$(m \times m)$

A是$m \times n$矩阵, 记$A = \begin{bmatrix} - \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}} - \\ \vdots \\ - \boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}} - \\ \vdots \\ - \boldsymbol{a}_j{}^{\mathrm{T}} - \\ \vdots \\ - \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}} - \end{bmatrix}$ $(m$行$)$, 则 $A^T = \begin{bmatrix} | & & | & & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_m \\ | & & | & & | & & | \end{bmatrix}$ $(m$列$)$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boxed{\boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2} & \cdots & \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_m \\ \boxed{\boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1} & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{\boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j} & \vdots \\ \vdots & \boxed{\boldsymbol{a}_j{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a}_m{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}$$

$$(AA^T)_{ij} = \boxed{\boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$$
$$(AA^T)_{ji} = \boxed{\boldsymbol{a}_j{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$$

即$(AA^T)_{ij} = (AA^T)_{ji}$
AA^T是$m \times m$对称矩阵.

习题选讲: 矩阵的性质

- 证明: 对于任意$m\times n$矩阵A, AA^T和A^TA是**对称矩阵**.

对称矩阵: $S^T=S$

$(s_{ij}=s_{ji})$

e.g. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

(2) A^TA:

$(n\times n)$

A是$m\times n$矩阵, 记$A=\begin{bmatrix} | & & | & & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & & | & & | & & | \end{bmatrix}$, 则 $A^T=\begin{bmatrix} -\ \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\ - \\ \vdots \\ -\ \boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}\ - \\ \vdots \\ -\ \boldsymbol{a}_j{}^{\mathrm{T}}\ - \\ \vdots \\ -\ \boldsymbol{a}_n{}^{\mathrm{T}}\ - \end{bmatrix}$

(n列) (n行)

$$A^TA=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boxed{\boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2} & \cdots & \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n \\ \boxed{\boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1} & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \boxed{\boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j} & \vdots \\ \vdots & \boxed{\boldsymbol{a}_j{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a}_n{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)_{ij}=\boxed{\boldsymbol{a}_i{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j}=\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$$
$$(A^TA)_{ji}=\boxed{\boldsymbol{a}_j{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i}=\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j$$

即$(A^TA)_{ij}=(A^TA)_{ji}$

A^TA是$n\times n$对称矩阵.

Homework

- 阅读教材: Chapter 1.3 - 1.4
- 完成作业: AA170_HW2